ANALISIS PERBANDINGAN MODEL ARUS LALU LINTAS LWR MELALUI MODEL HUBUNGAN DENSITAS-KECEPATAN GREENSHIELD-UNDERWOOD

*LWR TRAFFIC FLOW MODEL COMPARISON ANALYSIS USING DENSITY-VELOCITY RELATIONSHIP MODEL BY GREENSHIELD-UNDERWOOD*

Kathrina Natalia Maharani, Prodi Matematika FMIPA UNY

Nikenasih Binatari \*, Prodi Matematika FMIPA UNY

\*e-mail: nikenasih@uny.ac.id

**Abstrak**

Model hubungan densitas-kecepatan secara linier ditemukan oleh Greenshield, sedangkan model hubungan densitas-kecepatan Underwood berupa fungsi eksponensial. Tujuan penelitian ini yaitu menganalisa mengenai model pendekatan arus lalu lintas LWR melalui model hubungan densitas-kecepatan Greenshield-Underwood, serta perbandingan model pendekatan arus lalu lintas LWR melalui model hubungan densitas-kecepatan Greenshield-Underwood. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu menurunkan model LWR terlebih dahulu, kemudian mensubstitusikan hubungan linier dan eksponensial dari model hubungan densitas-kecepatan yang digunakan. Selanjutnya kurva karakteristik dan solusi dari model ditentukan dengan menyatakan persamaan Lagrange-Charpit. Analisa perbandingan dilakukan dengan menggunakan simulasi pada tiga kasus. Hasil dari perbandingan model LWR melalui model hubungan densitans-kecepatan Greenshield-Underwood yaitu pada kasus tanpa fan-like characteristic dan shock wave model Underwood menunjukkan nilai densitas yang lebih besar dibanding model Greenshield. Pada kasus dengan fan-like characteristic, model Underwood dan model Greenshield mempunyai nilai densitas yang sama besar. Pada kasus shock wave, model Greenshield mempunyai nilai densitas yang lebih besar dibandingkan model Underwood. Dilihat dari solusi umumnya, model Greenshield lebih cepat mengalami perubahan nilai densitas dibandingkan model Underwood. Model Underwood menunjukkan nilai kecepatan yang lebih besar dibandingkan model Greenshield.

**Kata kunci:** Model Matematika arus lalu lintas, LWR, Greenshield, Underwood.

***Abstract***

*The linear relationship between velocity and density was found by Greenshield, while the density-velocity relationship by Underwood was in exponential form. The purpose of this reseach is to analyze the traffic flow model by LWR using the density-velocity relationship by Greenshield and Underwood; as well as to compare of the LWR traffic flow model using the density-velocity relationship model by Greenshield and Underwood. The steps taken in this research firstly is to derive the LWR model, then subtitude the linear and exponential relationship of the model that we used. Furthermore, the characteristic curves and the solutions of the model are determined by the Lagrange-Charpit equation. For the comparative analysis, we did simulation in three cases. The result of coparative analysis for LWR model using density-velocity relationship model by Greenshield and Underwood noted that in the case without fan-like characteristic and shock wave, the Underwood model shows a higher density value than the Greenshield model. In the case of fan-like characteristic, the Underwood and Greenshield model have the same density value. In the case of shock wave, the Greenshield model has a higher density value than the Underwood model. From the general solution perspective, the changes of density value in Greenshield model was faster than the Underwood model. Lastly, the Underwood model shows a higher speed value than the Greenshield model.*

***Keywords****: traffic flow mathematical model, LWR, Greenshield, Underwood.*

**PENDAHULUAN**

Pemodelan matematika telah banyak digunakan dalam tujuan penelitian untuk menganalisa permasalahan dalam kehidupan nyata. Dengan menggunakan asumsi-asumi dan batasan yang sudah ditentukan, maka permasalahan dalam kehidupan nyata dapat ditransformasikan ke dalam model matematika. Permasalahan dalam kehidupan nyata di Indonesia yang sering dijumpai adalah kemacetan arus lalu lintas, yaitu keadaan dimana jumlah kendaraan yang terdapat pada suatu ruas jalan mengalami peningkatan yang mengakibatkan kecepatan kendaraan menurun atau berhenti. Arus lalu lintas dapat dimodelkan secara matematika, sehingga permasalahan kemacetan arus lalu lintas dapat diatasi. Upaya yang dapat dilakukan dalam mengatasi arus lalu lintas adalah dengan melakukan research mengenai arus lalu lintas dengan memodelkan karakteristik arus lalu lintas dan digunakan sebagai bahan acuan untuk pemerintah dalam mengambil suatu kebijakan mengenai kemacetan arus lalu lintas, sehingga arus lalu lintas di Indonesia dapat dioptimalkan.

Pada umumnya model arus lalu lintas bersifat makroskopis, mikroskopis atau mesoskopis (Van Wagenigen-Kessel, 2014). Pemodelan arus lalu lintas secara makroskopis yaitu pemodelan arus lalu lintas yang mengamati kendaraan secara keseluruhan dan bergantung pada kepadatan ruas jalan yang didasarkan pada model dinamika fluida, dimana pergerakan kendaraan-kendaraan dianalogikan sebagai pergerakan fluida. Parameter yang digunakan dalam model arus lalu lintas secara makroskopis antara lain kepadatan, kecepatan serta arus lalu lintas. Pada penelitian ini akan dikaji pemodelan arus lalu lintas secara makroskopis, karena pemodelan arus lalu lintas secara makroskopis cukup sederhana unntuk simulasi real-time dalam jaringan lalu lintas dan pengambilan data yang lebih mudah.

Model arus lalu lintas secara makroskopis diperkenalkan pertama kali oleh Lighthill dan Whitham pada tahun 1955 dan Richards pada tahun 1956. Model LWR didasarkan dari Hukum Konservasi Kendaraan pada jalan satu arah, dimana kendaraan bereaksi terhadap kecepatan kendaraan pada kepadatan disekitarnya, sehingga kecepatan kendaraan merupakan fungsi atas densitas. Hubungan antara kecepatan dan densitas telah banyak diteliti, pada penulisan skripsi ini pembahasan dibatasi hanya dengan menggunakan dua model yaitu Greenshield dan Underwood.

Greenshield mengasumsikan bahwa hubungan kecepatan dan densitas merupakan fungsi yang linier, dimana saat kondisi arus lalu lintas lengang atau tidak ada kendaraan, maka kendaraan dapat melaju dengan kecepatan maksimal dan saat konsdisi arus lalu lintas macet atau dipenuhi dengan kendaraan, maka kendaraan tidak dapat melaju atau kendaraan tidak dapat bergerak sehingga kecepatan nol (Greenshield,1934). Pada model hubungan kecepatan-densitas Underwood, diasumsikan bahwa hubungan kecepatan-densitas berupa fungsi eksponensial. Model Underwood menerangkan bahwa pada saat densitas lalu lintas maksimal atau arus lalu lintas dalam kondisi dipenuhi kendaraan, maka kecepatan kendaraan mendekati nol.

Model pendekatan lalu lintas dengan menggunakan dua model hubungan kecepatan-densitas memungkinkan adanya perbedaan karakteristik arus lalu lintas. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai perbandingan dua model hubungan kecepatan-kepadatan yaitu Greenshield dan Underwood.

## Arus Lalu Lintas

Arus lalu lintas merupakan susunan dari beberapa individu pengemudi pengendara yang saling berinteraksi satu sama lain dengan cara yang unik pada suatu elemen jalan (Hobbs F. D, 1995). Perilaku pengendara dapat mempengaruhi suatu arus lalu lintas. Bentuk interaksi yang dihasilkan oleh perilaku pengendara salah satunya adalah masalah kemacetan arus lalu lintas. Masalah kemacetan arus lalu lintas belum bisa diatasi sampai saat ini terutama di kota-kota besar di Indonesia. Upaya yang dilakukan untuk mengatasi masalah kemacetan arus lalu lintas yaitu diperlukannya perbaikan pada sistem lalu lintas yang didukung oleh teori traffic flow.

Teori traffic flow adalah suatu teori yang membahas tentang transportasi, yang menghubungkan anatara tiga variabel fundamental yaitu kecepatan, kepadatan, dan flow itu sendiri (Nagel, 1995). Solusi dari hubungan tersebut dengan kondisi awal dan masalah batasnya dimungkinkan bisa menjadi informasi yang berguna pada perencanaan dan optimalisasi masalah *traffic flow*. Pada awal tahun 1950 Lighthill dan Whithsam mengenalkan *One Dimensional Method* mengenai *Traffic Flow* yang menerangkan bahwa masalah transportasi bisa dipelajari dan dimodelkan dengan metode Dinamika Fluida, yang dimana metode tersebut kemudian dikembangkan oleh Richards sehingga membentuk model matematika dengan bidang penelitian makroskopis.

Dalam upaya untuk mengetahui keberagaman lalu lintas, digunakan parameter lalu lintas. Parameter arus lalu lintas dibedakan menjadi parameter makroskopis, mikroskopis dan mesoskopis. Arus lalu lintas secara makroskopis yaitu pemodelan arus lalu lintas yang terjadi pada banyak kendaraan pada suatu ruas jalan, disebut juga sebagai pendekatan yang mengamati kendaraan secara keseluruhan dan bergantung pada kepadatan ruas jalan, adapun parameter yang diamati antara lain kepadatan, kecepatan serta aliran lalu lintas.

## Variabel pada Model Arus Lalu Lintas Makroskopis

Variabel pada model arus lalu lintas secara makroskopis antara lain:

1. Kecepatan

Kecepatan adalah laju gerak kendaraan pada arus kendaraan yang ada di jalan raya, sehingga dapat diketahui mengenai perpindahan posisi kendaraan yang satu dengan yang lain.

1. Kepadatan Lalu Lintas (Densitas)

Kepadatan (densitas) dinotasikan dengan  yaitu jumlah kendaraan pada suatu ruas jalan pada satu waktu.

**Gambar 1 Ilustrasi partisi jalan pada interval **

Jumlahan densitas kendaraan pada  merupakan banyak kendaraan  dan  yang merupakan panjang partisi setiap selang sehingga diperoleh

.

Semakin banyak partisi ruas jalan, maka akan semakin mendekati riil nilai yang didapatkan. Partisi yang yang sangat banyak mengakibatkan perubahan terhadap nilai  atau  menjadi sangat kecil, sehingga banyak kendaraan  akan diubah menjadi bentuk kontinu yaitu

.

1. Aliran Kendaraan/ Fluks

Aliran kendaraan adalah banyaknya kendaraan yang lewat pada sebuah titik di waktu/periode yang telah ditentukan. Aliran lalu lintas (*traffic flow*) dilambangkan dengan . Ada beberapa cara untuk mencari aliran kendaraan. Aliran kendaraan atau fluks dapat dicari dengan membagi banyak kendaraan dengan waktu .

## Hukum Konservasi Kendaraan

Hubungan antara kepadatan lalu lintas dan arus lalu lintas dengan mengasumsikan bahwa jumlah kendaraan tetap pada waktu tertentu disebut konservasi jumlah kendaraan. Jika kita mengambil suatu ruas jalan dengan interval  sampai , maka jumlah kendaraan dapat diketahui dengan mengintegralkan  atau kepadatan lalu lintas, dapat ditulis

|  |  |
| --- | --- |
| . | (1) |

Diasumsikan jalannya searah dan hanya terdapat satu pintu masuk dan satu pintu keluar, kendaraan tidak dapat muncul dengan sendirinya tanpa melalui pintu masuk dan tidak dapat hilang dengan sendirinya tanpa melalui pintu keluar, maka kendaraan yang berada di ruas jalan yang dipartisi pada interval  sampai  hanya dapat berubah sesuai waktu. Aliran kendaraan pada  dapat dituliskan sebagai  dan pada  dapat dituliskan , dimana  dan  bukan merupakan konstanta karena bergantung pada waktu.

Jika ruas jalan  sampai  kita partisi menjadi  seperti Gambar 1. Kita ambil partisi dari  sampai , dan interval waktu dari  sampai .

Hukum konservasi kendaraan menyatakan bahwa banyaknya kendaraan yang melalui  selama  dikurangi banyaknya kendaraan yang melewati  selama  sama dengan banyaknya kendaraan saat  sepanjang  dikurangi banyaknya kendaraan saat  sepanjang .



.

Hukum konservasi kendaraan menghasilkan persamaan

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2) |

## Model Lighthill-Whitham-Richards (LWR) pada Jalan Satu Arah

Model LWR atau model Lighthill-Whitham-Richards pertama kali dipublikasikan oleh Lighthill-Whitham pada tahun 1955 dalam jurnal yang mendeskripsikan teori gerak gelombang kinetik yang diaplikasikan untuk memodelkan aliran lalu lintas pada jalur utama, kemudian Richards pada tahun 1956 mempublikasikan hal serupa. Penelitian yang dilakukan oleh Lighthill dan Whitham dengan melakukan studi pada perubahan kondisi arus lalu lintas di jalan bebas hambatan, sehingga diperoleh bahwa terdapat hubungan antara kecepatan dengan kepadatan lalu lintas.

Pada hukum konservasi kendaraan telah dihasilkan persamaan (2). Dianalogikan pada arus lalu lintas bahwa kendaraan mempunyai kecepatan yang konstan yaitu  dan kepadatan . Pada model LWR kecepatan merupakan fungsi atas densitas, sehingga

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3) |

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (2), sehingga persamaan menjadi

|  |  |
| --- | --- |
| . | (4) |

Pada model LWR kendaraan bereaksi terhadap kecepatan kendaraan yang dipengaruhi kepadatan disekitarnya, sehingga kecepatannya merupakan fungsi atas densitas

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5) |

sehingga fluks yang dihasilkan yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| . | (6) |

Subtitusikan persamaan (6) ke persamaan (2) sehingga diperoleh

|  |  |
| --- | --- |
| . | (7) |

Persmaan (7) yang disebut sebagai model LWR.

## Model Hubungan Densitas-Kecepatan

Kecepatan dan kepadatan atau densitas dihubungkan dalam suatu persamaan, yaitu pada persamaan (7). Jika nilai awal kepadatan dan kecepatannya diketahui, maka persamaan (7) dapat digunakan untuk memprediksi kepadatan lalu lintas di masa yang akan datang. Pada penelitian ini akan dibahas dua model hubungan kecepatan dan kepadatan atau densitas yaitu Greenshield dan Underwood.

1. Model Greenshield



**Gambar 2 Ilustrasi model Greenshield**

Pada model ini diasumsikan bahwa kecepatan merupakan fungsi yang linier terhadap densitas lalu lintas. Pada saat kondisi arus lalu lintas lengang atau tidak terdapat kendaraan, maka kepadatan atau densitasnya nol yang dinotasikan oleh , sehingga kendaraan dapat melaju dengan kecepatan maksimal yang dinotasikan oleh . Pada kondisi arus lalu lintas macet atau dipenuhi oleh kendaraan, maka kepadatan atau densitasnya menjadi maksimal yang dinotasikan oleh , sehingga menyebabkan kendaraan tidak dapat melaju atau kendaraan tidak dapat bergerak yang berarti bahwa kecepatan kendaraan nol yang dinotasikan oleh . Diketahui dari Gambar 3 bahwa terdapat dua buah titik yaitu  dan , sehingga persamaan yang dapat diperoleh dari dua buah titik tersebut adalah

|  |  |
| --- | --- |
| . | (8) |

Subtitusikan persamaan (8) ke persamaan (6), sehingga diperoleh

|  |  |
| --- | --- |
| . | (9) |

Hukum konservasi kendaraan pada model Greenshield menjadi

|  |  |
| --- | --- |
| . | (10) |

Persamaan (10) merupakan Persamaan LWR Model Greenshield dimana persamaan (10) adalah persamaan Diferensial Parsial Orde Satu Quasilinier dengan .

Persamaan kurva karakteristik untuk model Greenshield dengan diberikan nilau awal , berdasarkan metode karakteristik untuk persamaan diferensial parsial quasilinier dengan , maka persamaan Lagrange-Charpitnya yaitu

.

Persamaan kurva karakteristik model Greenshield dengan nilai awal , maka  yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| , | (11) |

maka solusi umum Model Greenshield yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| . | (12) |

Gelombang kejut terjadi akibat keadaan di suatu jalan, yang mengakibatkan sebagian ruas jalan atau seluruh jalan tertutup sehingga kendaraan tidak dapat bergerak. Jika pada kurva karakteristiknya terdapat satu atau beberapa titik yang mempunyai dua nilai densitas, maka densitasnya akan dicari dengan menggunakan *shock velocity* pada *shock wave*, selanjutnya akan dicari persamaan untuk kurva kejutnya.

Diberikan  dan .

Persamaan *shock velocity* model Greenshilednya yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| . | (13) |

1. Model Underwood

Underwood menemukan bahwa model hubungan kecepatan dan densitas Greenberg memberikan kecepatan yang tidak rasional, yaitu pada saat densitas mendekati nol, maka mengakibatkan kecepatan kendaraan yang mendekati tak hingga. Pada model Underwood fungsi kecepatan-densitasnya yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| . | (14) |

Persamaan (8) akan disubstitusikan ke persamaan (6) untuk mengetahui fluksnya, sehingga diperoleh

|  |  |
| --- | --- |
| . | (15) |

Setelah fluks diketahui, maka persamaan hukum konservasi pada model Underwood menjadi

|  |  |
| --- | --- |
| , | (16) |

sehingga persamaan LWR model Underwood yang diperoleh adalah

|  |  |
| --- | --- |
| . | (17) |

Persamaan kurva karakteristik untuk model Underwood dengan diberikan nilau awal , berdasarkan metode karakteristik untuk persamaan diferensial parsial quasilinier dengan , maka persamaan Lagrange-Charpitnya yaitu

.

Persamaan kurva karakteristik model Underwood dengan nilai awal , maka  yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| , | (18) |

maka solusi umum Model Underwood yaitu

|  |  |
| --- | --- |
| , | (19) |

Gelombang kejut terjadi akibat keadaan di suatu jalan, yang mengakibatkan sebagian ruas jalan atau seluruh jalan tertutup sehingga kendaraan tidak dapat bergerak. Jika pada kurva karakteristiknya terdapat satu atau beberapa titik yang mempunyai dua nilai densitas, maka densitasnya akan dicari dengan menggunakan *shock velocity* pada *shock wave*, selanjutnya akan dicari persamaan untuk kurva kejutnya.

Diberikan  dan .

Persamaan *shock velocity* model Underwoodnya yaitu

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**Ilustrasi Kasus**

Pada bagian ini akan diberikan contoh kasus untuk diilustrasikan.

Jika diberikan parameter pada arus lalu lintas  kilometer per jam dan  kendaraan per km, dengan nilai awal yang diberikan yaitu

.

1. Model Greenshield

Untuk mengetahui kurva karakteristik Kasus I pada model Greenshield, maka akan digunakan persamaan (11). Pada persamaan (11) akan diberikan  kilometer per jam dan  kendaraan per km, maka persamaan kurva karakteristik yang dihasilkan adalah

.

Sebagai ilustrasi, berikut adalah kurva karakteristik yang terbentuk.



Berdasarkan kurva karakteristik yang terbentuk dapat diketahui bahwa tidak terdapat celah atau *fan-like characteristic* maupun *shockwave*.

Solusi umum pada model Greenshield untuk kasus I adalah

.

1. Model Underwood

Untuk mengetahui kurva karakteristik Kasus I pada model Underwood, maka akan digunakan persamaan (18). Pada persamaan (18) akan diberikan  kilometer per jam dan  kendaraan per km, maka persamaan kurva akarakteristik yang dihasilkan adalah

.

Sebagai ilustrasi, berikut adalah kurva karakteristik yang terbentuk.



Berdasarkan kurva karakteristik yang terbentuk dapat diketahui bahwa tidak terdapat celah atau *fan-like characteristic* maupun *shockwave*.

Solusi umum pada model Underwood untuk kasus I adalah

.

Perbandingan model Greenshield dan Underwood pada kasus I:

1. Dilihat dari nilai densitas pada kurva karakteristik yang terbentuk.

|  |  |
| --- | --- |
| Model Greenshield | Model Underwood |
| Titik (0,0.02) |

|  |  |
| --- | --- |
| Chart  Description automatically generatedDi titik (0, 0.02) nilai densitasnya adalah 90. | Background pattern  Description automatically generatedDi titik (0, 0.02) nilai densitasnya adalah 90. |
| Titik (1.6, 0.015) |
| Background pattern  Description automatically generatedDi titik (1.6, 0.015) nilai densitasnya adalah 66. | Background pattern  Description automatically generatedDi titik (1.6, 0.015) nilai densitasnya secara implisit adalah . |
| Titik (2.2,0.035) |
| Chart, background pattern  Description automatically generated with medium confidenceDi titik (2.2, 0.035) nilai densitasnya adalah 66. | Background pattern  Description automatically generatedDi titik (2.2, 0.035) nilai densitasnya adalah . |

Pada kurva karakteristik terlihat bahwa saat  dan  nilai densitas pada model Greenshield dan model Underwood adalah 90. Pada saat  dan  nilai densitas pada kurva karakteristik yang dihasilkan pada model Greenshield adalah 66, sedangkan nilai densitas pada model Underwood adalah . Pada saat  dan  nilai densitas yang ditunjukkan kurva karakteristik pada model Greenshield adalah 66, sedangkan nilai densitas pada model Underwood adalah . Pada kasus I dapat dilihat nilai densitas pada kurva karakteristik yang dihasilkan bahwa pada titik yang sama model Underwood menunjukkan nilai densitas yang lebih besar dibandingkan model Greenshield.

1. Dilihat dari solusi umum yang diperoleh.

|  |
| --- |
| Model Greenshield |
|  |
| Model Underwood |
|  |

Berikut ilustrasi solusi umum kedua model



Pada model Greenshield dapat diketahui bahwa perubahan nilai densitasnya lebih cepat dibanding perubahan nilai densitas pada model Underwood.

1. Ilustrasi  pada model Greenshield dengan menggunakan persamaan (8) dan model Underwood dengan menggunakan persamaan (14) pada kasus I.



Kurva  pada model Greenshield pada saat  maka nilai  dan pada saat  maka nilai , sedangkan pada model Underwood pada saat  nilai  dan pada saat  maka nilai . Pada model Greenshield dan model Underwood dicapai nilai  yang sama pada saat .

**SIMPULAN**

1. Model pendekatan lalu lintas Lighthill-Whitham-Richards (LWR) melalui model Hubungan Densitas-Kecepatan Greenshield adalah



dan solusi umum model Greenshield dengan nilai awal  adalah

.

1. Model pendekatan lalu lintas Lighthill-Whitham-Richards (LWR) melalui model Hubungan Densitas-Kecepatan Underwood adalah



dan solusi umum model Underwood dengan nilai awal  adalah

.

1. Perbandingan model pendekatan lalu lintas Lighthill-Whitham-Richards (LWR) melalui model Densitas-Kecepatan Greenshield-Underwood yaitu
2. Pada kasus tanpa *fan-like characteristic* dan *shock wave* model Underwood menunjukkan nilai densitas yang lebih besar dibanding model Greenshield.
3. Pada kasus dengan *fan-like characteristic*, model Greenshield dan model Underwood meunjukkan nilai densitas yang sama.
4. Pada kasus dengan *shock wave*, model Greenshield menunjukkan nilai densitas yang lebih besar dibanding model Underwood.
5. Dilihat dari solusi umumnya dapat diketahui bahwa perubahan nilai densitas pada model Greenshield lebih cepat dibanding model Underwood.

Model Underwood menunjukkan nilai  yang lebih besar dibanding model Greenshield.

**UCAPAN TERIMA KASIH**

Terimakasih kepada koordinator Prodi Maatematika dan seluruh Dosen Prodi Matematika yang telah memberikan ilmu dan bimbingan hingga terselesainya artikel ini.

**DAFTAR PUSTAKA**

Aryes, Frank. (1992). *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Terjemahan Lily Ratna. Jakarta: Erlangga.

Dedy, Endang, dkk. (2003). *Common TextBook Kalkulus I*. Bandung: JICA.

Dym, L. Clive dan Eizabeth S Ivey. (1980). *Principle of Mathematical Modeling*. New York: Academia Press.

Greenshield, B.D. (1934). *A study of traffic capacity, Proc. Highw. Res. Bd, 14* 448-74.

Haberman, Richard. (1998). *Elementary Applied Partial Differential Partial Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems Third Edition*. New Jersey: Prentice Hall International.

Iswato, Ripno Juli. (2012). *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Leithold, Louis (Alih bahasa: E. Hutahaean). (1986). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Jakarta: Erlangga.

Lihgthill, M.J and Whitham, G.B. (1955). On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on long Crowded Road. Great Britain: Royal Society.

Mayer, Walker J. (1984). *Concept of Mathematical Modeling*. New York: McGraw-Hill Book Company.

Nagel, K. (1995). *“Practicle Hopping Vs. Fluid Dynamical Models For Traffic Flow”*.

Varberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2006). Calculus(9th Edition).New Jersey: Prentice Hall.

Rahadi, R. dkk. (2003). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Malang, Malang.

Richards, P.L. (1956). Shock Waves on the Highway, Operations Researches 4, 42-51.

Rich, B. (1906). *Schaum’s outline of theory and problems of geometry: includes plane, analytic, and Transformational Geometries*.

Ross, Shepley L. 2004. *Differential Equations Third Edition*. USA: John Wiley And Sons Inc.

Santosa, W dan R.J. Pamuntjak. (1993). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Proyek Pendidikan Tenaga Akademik Dikti.

Spiegel, Murray R. (1992). *Seri Buku Schaum: Teori dan Soal-Soal Kalkulus Lanjutan (Alih Bahasa)*. Jakarta: Erlangga.

Susanta, B. (1989). Model Matematika UT. Jakarta.

Underwood, R. T. (1961). Speed Volume, aand Density Relationships: Quality and Theory of Traffic Flow. Yale Bureau of Highway Traffic, pp, 141-188.

Van Wageningen-Kessels, Femke, et al. (2014). Genealogy of Traffic Flow Models. *Journal on transportations and Logistics, 4, 445-473*.