

**ANALISIS DINAMIK DARI MODEL MATEMATIKA PADA PENJERNIHAN AIR
YANG TERKONTAMINASI LOGAM BERAT DENGAN MENGGUNAKAN BAKTERI
*BACILLUS SUBTILIS***

Jurnal

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh

Riris Eka Lestari

NIM 12305141031

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2016

PERSETUJUAN

Jurnal dengan judul

**ANALISIS DINAMIK DARI MODEL MATEMATIKA PADA
PENJERNIHAN AIR YANG TERKONTAMINASI LOGAM BERAT
DENGAN MENGGUNAKAN BAKTERI *BACILLUS SUBTILIS***



Yang disusun oleh,

Nama : Riris Eka Lestari
NIM : 12305141031
Prodi : Matematika

Telah disetujui Dosen Pembimbing dan direview oleh Dosen Penguji untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh Gelar Sarjana Sains

Yogyakarta, 26 September 2016

Direview

Dosen Penguji

Fitriana Yuli S., M.Si

NIP. 19840707 200801 2 003

Dosen Pembimbing I

Dr. Hartono

NIP. 19620329 198702 1 002

Disetujui

Dosen Pembimbing II

Kus Prihantoso K., M.Si

NIP. 19790406 200501 1 005

ANALISIS DINAMIK DARI MODEL MATEMATIKA PADA PENJERNIHAN AIR YANG TERKONTAMINASI LOGAM BERAT DENGAN MENGGUNAKAN BAKTERI *BACILLUS SUBTILIS*

DYNAMIC ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS ON THE PURIFICATION OF WATER CONTAMINATED WITH HEAVY METALS USING BACTERIA *BACILLUS SUBTILIS*

Oleh: Riris Eka Lestari¹, Hartono², Kus Prihantoso Krisnawan³

Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta

Jl. Colombo 1 Yogyakarta 55281

Email: Ririsekalestari@ymail.com¹, Hartono@uny.ac.id², Kuspk1708@gmail.com³

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membentuk model matematika dari penjernihan air yang terkontaminasi logam berat dan menganalisa kestabilan titik ekuilibrium dari sistem tersebut. Penjernihan air dilakukan dengan menggunakan bakteri *B.subtilis*. Tahapan dalam penelitian ini yaitu membentuk model *predator-prey* dengan fungsi repon tak monoton, mencari titik ekuilibrium, menentukan nilai s (tingkat kematian bakteri) dan r (tingkat penambahan logam) dan menganalisis kestabilan di sekitar titik ekuilibrium. Diperoleh dua model matematika yaitu model pipa tertutup dan model pipa terbuka yang merupakan pengembangan dari model *predator-prey* dengan fungsi respon tak monoton. Hasil analisis menunjukkan bahwa model pipa tertutup dengan nilai $r = 9$, memiliki tiga titik ekuilibrium dengan semua titik ekuilibrium bernilai tidak stabil untuk semua nilai s . Model pipa terbuka memiliki jumlah titik ekuilibrium yang berbeda-beda tergantung pada nilai r dan s . Pada model pipa terbuka titik $T_1 = (0,0)^T$ stabil saat nilai $r < 0$ dan $s > 0$, T_2 stabil saat nilai $r < 0$ dan $0 < s < 0.202034$ dan T_3 stabil saat nilai $r < 0$ dan $-0.202034 \leq s < 0$. Dengan menggunakan kriteria Dulac, diketahui bahwa sistem tidak memiliki periodik orbit.

Kata kunci: Model *predator-prey*, fungsi respon tak monoton, model pipa tertutup, model pipa terbuka, analisis kestabilan.

Abstract

This research aims to establish mathematical models on purification of water that contaminated by heavy metals and analyze the stability of equilibrium point of the system. Water purification is done by using bacteria B.subtilis. The steps in this research are establish predator-prey model with non-monotonic functional response, determining equilibrium point, deciding the value of s (the death rate of bacteria) and r (the increase rate of heavy metals) and analyzing the stability around equilibrium point. Acquired two models namely the closed pipe models and open pipe models. The result of the analysis shows that closed pipe model with $r = 9$ has three equilibrium point and none of them are stable for each value of s. The open pipe model have different number of equilibrium point depend on the value of r and s. On open pipe model, $T_1 = (0,0)^T$ is stable when the value of $r < 0$ and $s > 0$, T_2 is stable when the value of $r < 0$ and $0 < s < 0.202034$ and T_3 is stable when the value of $r < 0$ and $-0.202034 \leq s < 0$. By using Dulac's criterion, it is known that the system does not have a periodic orbit.

Keywords: Predator prey models, non-monotonic functional response, closed pipe model, open pipe model, analysis of stability.

PENDAHULUAN

Lumpur panas Sidoarjo merupakan lumpur yang terus menerus keluar dari lubang hasil pengeboran permukaan tanah yang

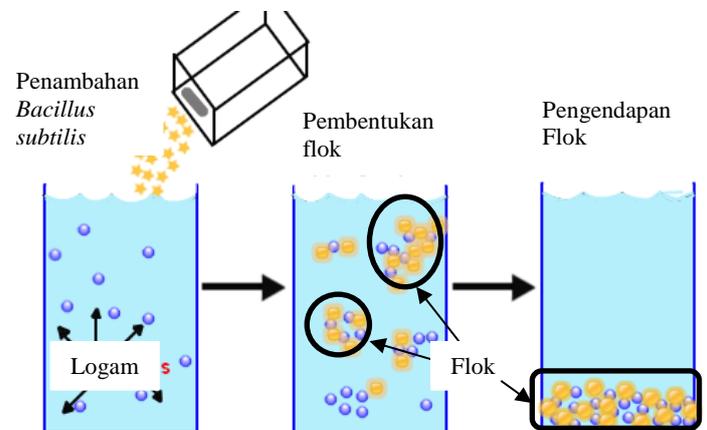
dilakukan oleh PT. Lapindo Brantas pada bulan Mei 2006. Hingga sekarang lumpur tersebut telah merendam pemukiman warga, sawah, bangunan dan jalan, sehingga mengakibatkan kerugian

mencapai ratusan miliar rupiah. Hal yang telah dilakukan oleh pemerintah untuk mengatasi masalah adalah dengan mengalirkan lumpur tersebut ke Sungai Porong (Gita Angraeni, Suntoyo dan Muhammad Zikra, 2014).

Gangguan kesehatan mulai dirasakan oleh warga di sekitar pembuangan lumpur Lapindo, gangguan kesehatan tersebut seperti mudah lelah, mual, nyeri pada perut, dan diare (Tika Arifani Putri dan Ririh Yudhastuti, 2013). Diduga kuat ada korelasi erat antara memburuknya kualitas lingkungan dengan menurunnya kualitas kesehatan warga. Peningkatan jumlah penderita ISPA di Puskesmas Porong tercatat sejumlah 24.719 (pada 2005) menjadi 52.543 (2009). Kenaikan lebih dari dua kali lipat juga terjadi pada penyakit *Gastritis* yang berjumlah 22.189 (tahun 2009) dari jumlah semula 7.416 warga (tahun 2005). Riset yang telah dilakukan oleh Walhi dengan memeriksa kandungan logam berat dalam air dan lumpur Lapindo di puluhan titik area semburan lumpur Lapindo dan sungai Porong pada 2008 menemukan jumlah Cd dan Pb ribuan kali di atas ambang baku (Catur Nusantara, 2015).

Untuk menangani kondisi air di sungai Porong tersebut, diperlukan teknologi penjernih air sehingga air dapat digunakan kembali oleh warga. Penelitian mengenai desain penjernih air telah dilakukan oleh Faisal Aziz P. dkk (2013). Pada penelitian tersebut sampel air yang diambil dari Sungai Porong diberi bakteri *Bacillus subtilis* dan dilihat pengaruhnya terhadap lumpur yang ada di dalam air. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa bakteri *Bacillus subtilis* dapat mengurangi logam berat pada air sampel.

Penjernihan air dengan bakteri *Bacillus subtilis* menggunakan sistem bioakumulasi. Bioakumulasi merupakan proses dimana logam berat diikat pada dinding sel *B.subtilis* dan digunakan untuk pertumbuhannya. Hasil pengikatan logam berat akan membentuk gumpalan partikel yang ukurannya dapat memungkinkan untuk dipisahkan dengan sedimentasi atau filtrasi yang biasa disebut sebagai flok sehingga akan terpisah antara air, bakteri dan logam berat. Berikut ilustrasi proses penjernihan air (Faisal Aziz P dkk, 2013:8):



Gambar 1. Ilustrasi Penjernihan Air

Logam berat yang terkandung dalam air yang diteliti yaitu Kadmium (Cd), Timbal (Pb) dan Tembaga (Cu). *Bacillus subtilis* resisten terhadap logam Cu dan Pb dikarenakan logam tersebut merupakan logam yang esensial bagi bakteri sedangkan tingkat toleransi bakteri terhadap logam Cd akan semakin menurun saat konsentrasi logam Cd tersebut meningkat (Tutut Arinda, Maya Shovitri, Enny Zulaika, 2012).

Bakteri *Bacillus subtilis* yang dimasukan ke dalam air yang mengandung logam berat akan menyerap logam tersebut, namun daya predasi bakteri terhadap logam berat semakin berkurang saat logam berat pada jumlah tertentu. Sehingga penjernihan air yang terkontaminasi logam berat

dapat dipandang sebagai kasus *predator-prey* dengan fungsi respon tak monoton. Bakteri *Bacillus subtilis* pada model ini berperan sebagai *predator* dan logam pencemar sebagai *prey*. Pada penelitian ini akan dibentuk model matematika dari penjernihan air yang terkontaminasi logam berat dengan menggunakan *B.Subtilis* dan menganalisis kestabilan model matematika yang telah dibentuk.

FORMULASI MODEL

Model matematika penjernihan air yang terkontaminasi logam berat dengan menggunakan bakteri *Bacillus subtilis* memiliki 2 kelas populasi, yaitu logam berat sebagai mangsa (*prey*) dan bakteri *Bacillus subtilis* sebagai pemangsa (*predator*). Akan dibentuk dua buah model matematika. Model pertama digunakan pada sistem penjernihan air dengan keadaan air tidak mengalir dan pemberian bakteri hanya dilakukan sekali namun ada pencemar logam yang terus menerus ditambahkan. Model ini yang selanjutnya akan disebut sebagai model matematika penjernihan air pipa tertutup. Model kedua digunakan pada sistem penjernihan air dengan keadaan air mengalir (sungai) dan penambahan bakteri dapat dilakukan sesuai kebutuhan yang dapat disebut sebagai model matematika penjernihan air pipa terbuka.

Model Pipa Tertutup

Asumsi-asumsi yang digunakan pada model pipa tertutup adalah sebagai berikut:

1. Laju populasi logam berat dengan tidak adanya *B.subtilis* akan terus bertambah mendekati eksponensial dan tak terbatas dengan angka pertumbuhan intrinsik dari logam berat 9 juta L/jam.

2. Persediaan makanan *B.subtilis* tergantung pada populasi logam berat.
3. Populasi logam berat di air akan menurun dan populasi *B.subtilis* akan meningkat pada saat terjadinya interaksi antara logam dengan *B.subtilis* karena logam berat akan diserap oleh *B.subtilis* untuk kebutuhan pertumbuhannya dan kemudian diendapkan.
4. Laju pertumbuhan *B.subtilis* adalah 1.15 kali/jam.
5. Gerakan dan kontak *B.subtilis* dan logam berat berlangsung secara acak sehingga setiap logam berat memiliki peluang yang sama untuk dimangsa.
6. Besar peningkatan populasi *B.subtilis* dengan adanya interaksi dengan logam berat berbanding lurus dengan tingkat penurunan populasi logam berat akibat interaksi dengan *B.subtilis*
7. Pada konsentrasi tertentu logam berat dapat menurunkan tingkat toleransi *B.subtilis* terhadap logam berat sehingga mengakibatkan kematian bakteri.

Berdasarkan asumsi di atas, untuk kasus pipa tertutup dengan fungsi respon tak monoton didapatkan model sebagai berikut (Ruan,S dan Xiao,D, 2001):

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= 9l - \frac{lb}{8.1 + l^2} \\ \frac{db}{dt} &= -sb + \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Model Pipa Terbuka

Untuk mengkonstruksi model *predator-prey* penjernihan air pipa terbuka, diperlukan tujuh asumsi yang sama dengan model sebelumnya namun dengan angka pertumbuhan intrinsik dari logam berat yaitu r dan tambahan 2 asumsi lain yaitu : (8) Adanya pengurangan

jumlah logam berat dan bakteri karena terbawa arus sungai. (9) Penambahan jumlah bakteri dapat dilakukan berkali-kali. Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, bentuk model pada kasus pipa terbuka dengan fungsi respon tak monoton adalah sebagai berikut (Ruan,S dan Xiao,D, 2001):

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} &= rl - \frac{lb}{8.1 + l^2} \\ \frac{db}{dt} &= -sb + \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2}\end{aligned}\quad (2)$$

dengan $\frac{dl}{dt}$ merupakan laju pertumbuhan logam berat pada waktu t , $\frac{db}{dt}$ merupakan laju pertumbuhan bakteri pada waktu t , $b(t)$ menyatakan populasi *B.subtilis* pada waktu t (mg/L), $l(t)$ menyatakan populasi logam berat pada waktu t (mg/L), r menyatakan angka pertumbuhan alami dari logam berat (juta L/jam) dan s menyatakan angka kematian bakteri (juta L/jam).

TITIK EKUILIBRIUM

Berdasarkan model yang telah didapatkan, selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium dari sistem (1) dan (2).

Model Pipa Tertutup

Titik (l, b) akan menjadi titik ekuilibrium jika $\frac{dl}{dt} = 0$ dan $\frac{db}{dt} = 0$. Sehingga sistem (1) dapat ditulis

$$0 = l \left(9 - \frac{b}{8.1 + l^2} \right) \quad (3a)$$

$$0 = b \left(-s + \frac{1.15 l}{8.1 + l^2} \right) \quad (3b)$$

Berdasarkan Persamaan (3b), diperoleh

$$b = 0 \quad (4)$$

$$-s + \frac{1.15 l}{8.1 + l^2} = 0. \quad (5)$$

Jika persamaan (4) disubstitusi ke Persamaan (3a), diperoleh

$$9l = 0.$$

Akibatnya diperoleh titik ekuilibrium $T_1 = (0,0)^T$.

Dari persamaan (5) diperoleh

$$l_1 = \frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \quad (6a)$$

$$l_2 = \frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}. \quad (6b)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (6a) dan (6b) ke persamaan (3a) sehingga di dapatkan 2 titik ekuilibrium, yaitu

$$T_2 = \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, 9 \left(8.1 + \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right)^T \right)$$

$$T_3 = \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, 9 \left(8.1 + \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right)^T \right)$$

dengan $0 \leq s \leq \sqrt{\frac{(1.15)^2}{32.4}} = 0.202034$.

Model Pipa Terbuka

Untuk model pipa terbuka, pencarian titik ekuilibrium akan berdasarkan nilai r dan s .

1. Saat $r = 0$ dan $s \neq 0$

Sistem (2) berubah menjadi

$$0 = -\frac{lb}{8.1 + l^2} \quad (7a)$$

$$0 = -sb + \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2} \quad (7b)$$

Dari persamaan (7b) didapatkan

$$b = 0 \quad (8a)$$

$$-s + \frac{1.15 l}{8.1 + l^2} = 0. \quad (8b)$$

Substitusi persamaan (8a) ke persamaan (7a) hingga didapatkan $l(0) = 0$. Akibatnya diperoleh titik ekuilibrium $T_1 = (\bar{l}, 0)^T$ dengan $\bar{l} \in \mathbb{R}$ & $\bar{l} \geq 0$.

Selanjutnya substitusi persamaan (8b) ke persamaan (7a) hingga didapatkan titik ekuilibrium $T_2 = \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, 0 \right)^T$ dan

$$T_3 = \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, 0 \right)^T. \quad \text{Karena } T_2,$$

T_3 termasuk kedalam T_1 maka untuk sistem (2) dengan nilai $r = 0$ dan $s \neq 0$ didapatkan satu

titik ekuilibrium yaitu $T_1 = (\bar{l}, 0)^T$ dengan $\bar{l} \in \mathbb{R}$ & $\bar{l} \geq 0$.

2. Saat $r \neq 0$ dan $s = 0$

Sistem (2) berubah menjadi

$$0 = rl - \frac{lb}{8.1 + l^2} \tag{9a}$$

$$0 = \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2} \tag{9b}$$

Dari persamaan (9b) diperoleh

$$l = 0 \tag{10a}$$

$$b = 0. \tag{10b}$$

Gunakan persamaan (9a) dan didapatkan

$$r8.1 + rl^2 = b. \tag{11}$$

Substitusi persamaan (10a) ke persamaan (11), hingga diperoleh titik ekuilibrium $T_1 = (0, r8.1)^T$.

Selanjutnya substitusi persamaan (10b) ke persamaan (9a) dan didapatkan

$$rl = 0.$$

Karena $r \neq 0$ maka nilai $l = 0$. Sehingga didapatkan titik ekuilibrium $T_2 = (0,0)^T$.

3. Saat $r = 0$ dan $s = 0$

Sistem (2) berubah menjadi

$$0 = -\frac{bl}{8.1 + l^2} \tag{12a}$$

$$0 = \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2}. \tag{12b}$$

Dari persamaan (12a) didapatkan

$$l = 0 \tag{13a}$$

$$b = 0. \tag{13b}$$

Substitusi persamaan (13a) ke persamaan (12b), diperoleh

$$0 = \frac{1.15 (0)b}{8.1 + 0^2}.$$

Sehingga nilai b yang memenuhi adalah $b \in \mathbb{R}$ dan $b \geq 0$ maka didapatkan titik ekuilibrium $T_1 = (0, \bar{b})^T$ dengan $\bar{b} \in \mathbb{R}$ dan $\bar{b} \geq 0$.

Selanjutnya substitusi persamaan (13b) ke persamaan (12b) dan diperoleh

$$0 = \frac{1.15 l(0)}{8.1 + l^2},$$

nilai l yang memenuhi adalah $\bar{l} \in \mathbb{R}$ dan $\bar{l} \geq 0$ sehingga didapatkan titik ekuilibrium $T_2 = (\bar{l}, 0)^T$ dengan $\bar{l} \in \mathbb{R}$ dan $\bar{l} \geq 0$.

4. Saat $r \neq 0$ dan $s \neq 0$

Untuk titik ekuilibrium saat $s \neq 0$ dan $r \neq 0$ telah dicari pada model sebelumnya (model pipa tertutup) dan didapatkan tiga titik ekuilibrium, yaitu

a) $T_1 = (0,0)^T$

b) $T_2 = \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, r \left(8.1 + \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right) \right)^T$

c) $T_3 = \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, r \left(8.1 + \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right) \right)^T$

dengan $-0.202034 \leq s < 0$ atau $0 < s \leq 0.202034$.

ANALISIS KESTABILAN

Didefinisikan fungsi untuk model pipa tertutup sebagai berikut:

$$f_1(l, b) = 9l - \frac{lb}{8.1 + l^2} \tag{14}$$

$$f_2(l, b) = -sb + \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2}$$

Matriks Jacobian dari sistem (14) adalah

$$J = \begin{bmatrix} 9 - \frac{b(8.1 - l^2)}{(8.1 + l^2)^2} & -\frac{l}{8.1 + l^2} \\ \frac{1.15b(8.1 - l^2)}{(8.1 + l^2)^2} & -s + \frac{1.15l}{8.1 + l^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi-sungsi pada model pipa terbuka sebagai berikut:

$$f_1(l, b) = rl - \frac{lb}{8.1 + l^2} \tag{15}$$

$$f_2(l, b) = -sb + \frac{1.15 lb}{8.1 + l^2}$$

Matriks Jacobian dari Sistem (15) adalah

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{b(8.1 - l^2)}{(8.1 + l^2)^2} & -\frac{l}{8.1 + l^2} \\ \frac{1.15b(8.1 - l^2)}{(8.1 + l^2)^2} & -s + \frac{1.15l}{8.1 + l^2} \end{bmatrix}$$

Kestabilan di Titik Ekuilibrium Model Pipa Tertutup

Pada model pipa tertutup terdapat tiga titik ekuilibrium. Berikut kestabilan pada masing-masing titik ekuilibrium:

1. Pada $T_1 = (0,0)^T$

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium T_1 yaitu

$$J(T_1) = \begin{bmatrix} 9 - \frac{0(8.1 - (0)^2)}{(8.1 + (0)^2)^2} & -\frac{0}{8.1 + (0)^2} \\ \frac{1.15(0)(8.1 - (0)^2)}{(8.1 + (0)^2)^2} & -s + \frac{1.15(0)}{8.1 + (0)^2} \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $J(T_1)$ dapat dicari dengan menentukan $\det(J(T_1) - \lambda I) = 0$ dimana λ adalah nilai eigen dan I adalah matriks identitas. Didapatkan

$$(9 - \lambda)(-s - \lambda) - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(-9 + s) - 9s = 0.$$

Sehingga nilai λ yang didapatkan yaitu $\lambda = 9$ atau $\lambda = -s$. Karena terdapat nilai λ positif maka sistem pada titik ekuilibrium $T_1 = (0,0)^T$ tidak stabil.

$$2. \text{ Pada } T_2 = \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, r \left(8.1 + \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right) \right)^T$$

Untuk memudahkan perhitungan, dimisalkan $X = 1.15 + \sqrt{1.3225 - 32.4s^2}$ sehingga titik ekuilibrium menjadi $T_2 = \left(\frac{X}{2s}, 9 \left(8.1 + \frac{X^2}{4s^2} \right) \right)^T$.

Dengan menggunakan analogi seperti yang dilakukan pada T_1 , didapatkan nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2(32.4s^2 + X^2)}$$

dengan

$$a_1 = (s - 18)X^2 - 2.3Xs + 32.4s^3$$

$$a_2 = -18X^4s + 20.7X^3s - 583.2X^2s^3 + 670.68Xs^3$$

$$X = 1.15 + \sqrt{1.3225 - 32.4s^2}.$$

Untuk memastikan perubahan tanda λ_i (positif atau negatif) seiring dengan perubahan

nilai s untuk titik ekuilibrium T_2 dapat dilihat pada Tabel 1 dengan nilai $s_1 = 0.202034$. Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa T_2 selalu bersifat tidak stabil.

$$3. \text{ Pada } T_3 = \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, r \left(8.1 + \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right) \right)^T$$

Untuk mempermudah perhitungan misal $1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 4s^2a} = Y$, sehingga titik

ekuilibrium menjadi $T_3 = \left(\frac{Y}{2s}, 9 \left(8.1 + \frac{Y^2}{4s^2} \right) \right)^T$.

Dan nilai eigen yang didapatkan adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2(32.4s^2 + Y^2)}$$

dengan

$$a_1 = (s - 18)Y^2 - 2.3Ys + 32.4s^3$$

$$a_2 = -18Y^4s + 20.7Y^3s - 583.2Y^2s^3 + 670.68Ys^3$$

$$Y = 1.15 - \sqrt{1.3225 - 32.4s^2}.$$

Untuk memastikan perubahan tanda λ_i (positif atau negatif) seiring dengan perubahan nilai s untuk titik ekuilibrium T_3 dapat dilihat pada Tabel 1 dengan nilai $s_1 = 0.202034$. Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa T_3 selalu bersifat tidak stabil.

Tabel 1. Nilai Eigen pada T_2 dan T_3

No.	TE	$s < s_1$		$s = s_1$		$s > s_1$	
		λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
1	T_2	+	-	+	-	Tidak	
2	T_3	+	+	+	-	Ada	

Kestabilan di Titik Ekuilibrium Model Pipa Terbuka

Pada model pipa terbuka, banyaknya titik ekuilibrium bergantung pada nilai r dan s . berikut kestabilan pada setiap nilai r dan s :

1. Saat $r = 0$ dan $s \neq 0$

Titik ekuilibrium dari sistem (2) dengan $r = 0$ dan $s \neq 0$ adalah $T_1 = (\bar{l}, 0)^T$ dengan $\bar{l} \in \mathbb{R}$ dan $\bar{l} \geq 0$ serta didapatkan nilai eigen $\lambda = 0$ dan $\lambda = -s + \frac{1.15(\bar{l})}{8.1 + (\bar{l})^2}$. Karena terdapat nilai $\lambda =$

0 maka tidak dapat ditarik kesimpulan mengenai kestabilan sistem (2) pada nilai $r = 0$ dan $s \neq 0$.

2. Saat $r \neq 0$ dan $s = 0$

Titik ekuilibrium dari sistem (2) dengan $r \neq 0$ dan $s = 0$ adalah $T_1 = (0, 8.1r)^T$ dan $T_2 = (0, 0)^T$. Pada $T_1 = (0, 8.1r)^T$ didapatkan nilai eigen $\lambda = 0$. Sedangkan pada $T_2 = (0, 0)^T$ didapatkan nilai eigen $\lambda = 0$ dan $\lambda = r$. Karena terdapat nilai $\lambda = 0$ maka tidak dapat ditarik kesimpulan mengenai kestabilan sistem (2) pada nilai $r \neq 0$ dan $s = 0$.

3. Saat $r = 0$ dan $s = 0$

Titik ekuilibrium yang didapat dari sistem (3.22) dengan $r = 0$ dan $s = 0$ Adalah $T_1 = (0, \bar{b})^T$ dengan $\bar{b} \in \mathbb{R}$ dan $\bar{b} \geq 0$ dan $T_2 = (\bar{l}, 0)^T$ dengan $\bar{l} \in \mathbb{R}$ dan $\bar{l} \geq 0$. Pada titik ekuilibrium $T_1 = (0, \bar{b})^T$ didapatkan nilai eigen $\lambda = 0$ dan $\lambda = \frac{\bar{b}}{8.1}$. Sedangkan pada titik ekuilibrium $T_2 = (\bar{l}, 0)^T$ didapatkan nilai eigen $\lambda = 0$ dan $\lambda = \frac{1.15(\bar{l})}{8.1+(\bar{l})^2}$. Karena terdapat nilai $\lambda = 0$ maka tidak dapat ditarik kesimpulan mengenai kestabilan sistem (2) pada nilai $r = 0$ dan $s = 0$.

4. Saat $r \neq 0$ dan $s \neq 0$

Titik ekuilibrium dari sistem (2) dengan $r \neq 0$ dan $s \neq 0$ adalah $T_1 = (0, 0)^T$, $T_2 = \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, r \left(8.1 + \left(\frac{1.15 + \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right) \right)^T$, $T_3 = \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s}, r \left(8.1 + \left(\frac{1.15 - \sqrt{(1.15)^2 - 32.4s^2}}{2s} \right)^2 \right) \right)^T$. Pada $T_1 = (0, 0)^T$ didapatkan nilai eigen $\lambda = r$ dan $\lambda = -s$. Kestabilan pada T_1 berdasarkan nilai r dan s dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Kestabilan pada T_1

No	$\lambda_1 = r$	$\lambda_2 = -s$	Kestabilan
1	$r < 0$	$s < 0$	Tidak stabil
2	$r < 0$	$s > 0$	Stabil

3	$r > 0$	$s < 0$	Tidak stabil
4	$r > 0$	$s > 0$	Tidak stabil

Pada T_2 didapatkan nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2(32.4s^2 + X^2)}$$

dengan

$$a_1 = (s - 2r)X^2 - 2.3Xs + 32.4s^3$$

$$a_2 = -2rsX^4 + 2.3rsX^3 - 64.8rs^3X^2 + 74.52rs^3X$$

$$X = 1.15 + \sqrt{1.3225 - 32.4s^2}$$

Untuk mempermudah analisis, pada Gambar 2 diperlihatkan grafik nilai eigen untuk T_2 berdasarkan nilai r dan s yang selanjutnya akan diambil beberapa titik berdasarkan pembagian wilayah yang didapatkan dari Gambar 2. Kestabilan untuk setiap wilayah pada T_2 dapat dilihat pada Tabel 3.

Pada T_3 didapatkan nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2(32.4s^2 + Y^2)}$$

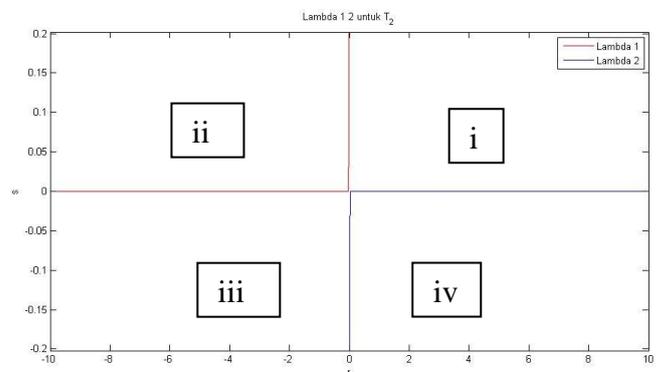
dengan

$$a_1 = (s - 2r)Y^2 - 2.3Ys + 32.4s^3$$

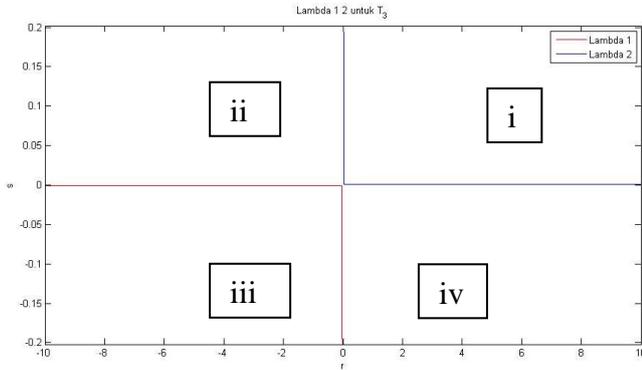
$$a_2 = -2rsY^4 + 2.3rsY^3 - 64.8rs^3Y^2 + 74.52rs^3Y$$

$$Y = 1.15 - \sqrt{1.3225 - 32.4s^2}$$

Grafik nilai eigen untuk T_3 berdasarkan nilai r dan s dapat dilihat pada Gambar 3, yang selanjutnya akan diambil beberapa titik berdasarkan pembagian wilayah yang didapatkan dari Gambar 3. Kestabilan untuk setiap wilayah pada T_3 dapat dilihat pada Tabel 4.



Gambar 2. Grafik Nilai Eigen untuk T_2

Gambar 3. Grafik Nilai Eigen untuk T_3 Tabel 3. Kestabilan pada T_2

No	Wilayah	λ_1	λ_2	Kestabilan
1	i	+	-	Tidak Stabil
2	ii	-	-	Stabil
3	iii	+	-	Tidak Stabil
4	iv	+	+	Tidak Stabil

Tabel 4. Kestabilan pada T_3

No	Wilayah	λ_1	λ_2	Kestabilan
1	i	+	+	Tidak Stabil
2	ii	-	+	Tidak Stabil
3	iii	-	-	Stabil
4	iv	+	-	Tidak Stabil

INTERPRETASI MODEL

Pada model pipa tertutup didapatkan bahwa sistem tidak pernah stabil pada setiap titik ekuilibrium dengan nilai $r = 9$ dan $0 < s \leq 0.202034$ artinya saat banyak logam yang ditambahkan pada daerah observasi (Sungai Porong) sebanyak 9 juta L/jam dan kematian bakteri kurang dari 0.202034 juta L/jam dengan asumsi tidak ada bakteri dan logam berat yang terbawa arus sungai maka tidak dapat dipastikan jumlah akhir dari banyaknya logam dan bakteri pada waktu tertentu sehingga air sungai tidak layak untuk dikonsumsi warga sekitar.

Pada model pipa terbuka, terdapat tiga titik ekuilibrium yang bernilai stabil dengan nilai r dan s tertentu. Pertama adalah $T_1 = (0,0)^T$ dengan nilai $r < 0$ dan $s > 0$, kedua adalah T_3 dengan nilai $r < 0$ dan $-0.202034 \leq s < 0$ dan ketiga T_2 dengan nilai $r < 0$ dan $0 < s < 0.202034$.

1. Interpretasi pada T_1

Telah diketahui bahwa sistem akan stabil saat nilai $r < 0$ dan $s > 0$ sehingga saat penambahan logam berat lebih kecil dari banyaknya logam berat yang terbawa arus sungai dan banyaknya bakteri yang ditambahkan lebih sedikit dari banyak bakteri yang mati ditambah banyak bakteri yang terbawa arus. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu tertentu, kandungan logam berat dan bakteri pada air sungai akan semakin berkurang atau bahkan menghilang sehingga air akan layak untuk dikonsumsi warga.

2. Interpretasi pada T_2

Titik ekuilibrium T_2 akan bernilai stabil saat nilai $r < 0$ dan $0 < s < 0.202034$. misalkan diambil nilai $r = -2$ dan $s = 0.15$ sehingga didapatkan titik ekuilibrium $T_2(6.4013, -98.153)^T$. Pada kenyataannya kandungan logam dan bakteri tidak mungkin bernilai negatif, sehingga kasus ini tidak mungkin terjadi pada kehidupan nyata.

3. Interpretasi pada T_3

Titik ekuilibrium T_3 akan bernilai stabil saat nilai $r < 0$ dan $-0.202034 \leq s < 0$. Misal diambil nilai $r = -2$ dan $s = -0.15$ sehingga didapatkan titik ekuilibrium $T_3(-1.265, -19.402)$. Ini berarti bahwa saat penambahan logam berat lebih kecil 2 Juta L/jam dari banyaknya logam berat yang terbawa arus sungai dan banyaknya bakteri yang ditambahkan lebih banyak 0.15 juta L/jam dari banyak bakteri yang mati ditambah banyak bakteri yang terbawa arus maka pada rentan waktu tertentu banyaknya kandungan bakteri dalam air sungai akan menuju -19.4023 mg/L dan banyaknya kandungan logam akan menuju -1.265 mg/L. Pada kenyataannya kandungan logam dan bakteri tidak mungkin bernilai negatif, sehingga kasus ini tidak mungkin terjadi pada kehidupan nyata.

ORBIT PERIODIK

Pada model matematika *predator-prey*, untuk mengetahui apakah mangsa dan pemangsa akan selalu ada dalam sistem maka digunakan orbit periodik. Jika sistem memiliki orbit periodik maka mangsa dan pemangsa akan selalu ada secara bersama-sama. Untuk analisis ada tidaknya orbit periodik pada sistem (1) dan sistem (2),

dilakukan dengan menggunakan kriteria Dulac. Diberikan suatu fungsi Dulac B yang berada pada R^2 yaitu

$$B(l, b) = \frac{1}{lb}.$$

Sehingga, jika

$$f_1 = rl - \frac{lb}{8.1 + l^2}$$

$$f_2 = -sb + \frac{1.15lb}{8.1 + l^2}$$

maka

$$Bf_1 = \left(rl - \frac{lb}{8.1 + l^2}\right) \left(\frac{1}{lb}\right) = \frac{r}{b} - \frac{1}{8.1 + l^2}$$

$$Bf_2 = \left(-sb + \frac{1.15lb}{8.1 + l^2}\right) \left(\frac{1}{lb}\right) = -\frac{s}{l} + \frac{1}{8.1 + l^2}$$

dan diperoleh

$$\frac{\partial(Bf_1)}{\partial l} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial b} = \frac{2l}{(8.1 + l^2)^2}.$$

Karena $l > 0$, nilai $\frac{\partial(Bf_1)}{\partial l} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial b}$ selalu positif maka sistem (1) dan sistem (2) tidak memiliki orbit periodik.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil analisis dinamik dari model matematika pada penjernihan air yang terkontaminasi logam berat dengan menggunakan bakteri *Bacillus subtilis* diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Terbentuk dua buah model matematika yaitu model matematika pipa tertutup dan model matematika pipa terbuka.

2. Analisis kestabilan dari model matematika pada penjernihan air yang terkontaminasi logam berat dengan menggunakan bakteri *Bacillus subtilis* telah dilakukan pada kedua model dan didapatkan hasil bahwa pada model pipa tertutup, semua titik ekuilibrium bernilai tidak stabil sedangkan pada model pipa terbuka terdapat tiga titik ekuilibrium yang bernilai stabil, yaitu T_1 saat nilai $r < 0$ dan $s > 0$, T_2 saat nilai $r < 0$ dan $0 < s < 0.202034$ dan T_3 saat nilai $r < 0$ dan $-0.202034 \leq s < 0$.

Saran

Pada penelitian ini, model pipa tertutup mengambil nilai pertambahan intrinsik logam berat sebesar 9 Juta L/jam. Penulisan selanjutnya dapat dikembangkan dengan analisis bifurkasi, serta penggunaan nilai pertambahan intrinsik yang berbeda pada model pipa tertutup atau dapat dikembangkan dengan memeperbanyak data dari kasus sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Catur Nusantara. 2015. *Lumpur Lapindo, Setelah 9 Tahun*. Diakses dari <http://korbanlumpur.info/2015/05/lumpur-lapindo-setelah-9-tahun/>, pada tanggal 1 Maret 2016.
- Faisal Aziz P, Bintang Wahyu, Boing Indrazwari, Andika Rendi S. dan Happy I. Masita. 2013. "Design of Purification Water" : Pemanfaatan Bakteri *Bacillus subtilis* Sebagai Upaya Pengganti Tawas pada Proses Penjernihan Air Bersih di Pemukiman Sungai Porong, Sidoarjo. *Laporan Penelitian*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.
- Gita Angraeni, Suntoyo dan Muhammad Zikra. 2014. Analisa Perubahan Kualitas Air Akibat Pembuangan Lumpur Sidoarjo pada Muara Kali Porong. *Jurnal Teknik Pomits*. Vol. 2, No. 1, ISSN: 2337-3539 (2301-9271 Print).
- Ruan, Shigui & Xiao, Dongmei. 2001. Global Analysis in a Predator Prey Sistem with Nonmototonic Functional Response. *Society for Industrial and Applied Mathematics* (Vol. 61 No. 4). Hlm. 1445–1472.
- Tika Arifani Putri dan Ririh Yudhastuti. 2013. Kandungan Besi (Fe) pada Air Sumur dan Gangguan Kesehatan Masyarakat di Sepanjang Sungai Porong Desa Tambak Kalisogo Kecamatan Jabon Sidoarjo. *Jurnal Kesling*. Vol. 7, No. 1, Juli.
- Tutut Arianda, Maya Shovitri & Enny Zulaika. 2012. Resistensi Bakteri *Bacillus Subtilis* Terhadap Logam Berat. Scientific conference of environmental technology IX-2012. *Makalah*. Surabaya: ITS ECO CAMPUS.