



**PREDIKSI JUMLAH PENDUDUK PEREMPUAN DI KOTA MALANG PADA
TAHUN 2045 MENGGUNAKAN MATRIKS LESLIE**

***PREDICTION THE FEMALE POPULATION OF KOTA MALANG IN 2045 USING
LESLIE MATRIX***

Afifah Kamiliya *, Departemen Matematika FSM UNDIP
Ferdinandus Riyandika Pratama , Departemen Matematika FSM UNDIP
Nikken Prima Puspita, Departemen Matematika FSM UNDIP
*e-mail : afifahka@students.undip.ac.id

Abstrak

Proyeksi penduduk perempuan Kota Malang dilakukan dengan menerapkan model matriks Leslie berdasarkan parameter fertilitas dan transisi usia. Data yang digunakan pada artikel ini adalah jumlah penduduk perempuan menurut kelompok usia lima tahunan, *Age-Specific Fertility Rate* (ASFR), dan koefisien transisi usia sebagai komponen penyusun matriks Leslie. Matriks Leslie dibentuk menggunakan nilai fertilitas pada baris pertama dan koefisien transisi usia pada elemen subdiagonal. Analisis nilai eigen dan vektor eigen dilakukan untuk menentukan laju pertumbuhan populasi dan distribusi usia stabil penduduk perempuan hingga tahun 2045. Hasil analisis menunjukkan nilai eigen dominan sebesar 1,0328 sedangkan vektor eigen menunjukkan proporsi distribusi usia yang stabil, dengan proporsi penduduk usia 65 tahun ke atas sebesar 15,99%. Pertumbuhan jumlah penduduk perempuan Kota Malang berlangsung bersamaan dengan penuaan penduduk sehingga perubahan usia pada setiap kelompok perlu dipertimbangkan dalam perencanaan demografi jangka panjang .

Kata kunci: Proyeksi Populasi, Matriks Leslie, ASFR, Nilai Eigen, Vektor Eigen

Abstract

The projection of the female population of Kota Malang was carried out by applying the Leslie matrix model based on fertility and age transition parameters. The data used in this article are the number of female population according to the five-year age group, Age-Specific Fertility Rate (ASFR), and age transition coefficient as components of the Leslie matrix. The Leslie matrix was formed using the fertility value in the first row and the age transition coefficient in the subdiagonal element. The analysis of the eigenvalue and the eigenvector was carried out to determine the population growth rate and stable age distribution of the female population until 2045. The results of the analysis showed a dominant eigenvalue of 1.0328 while the eigenvector showed a stable proportion of age distribution, with the proportion of the population aged 65 years and above at 15.99%. The growth of the female population of Kota Malang occurs simultaneously with the aging of the population, so age changes in each group need to be considered in long-term demographic planning.

Keywords: Population Projection, Leslie Matrix, ASFR, EigenValue, EigenVector

PENDAHULUAN

Fertilitas memiliki peran penting dalam mempengaruhi perubahan demografi di suatu wilayah. Jika angka kelahiran terus menurun hingga berada di bawah yang dibutuhkan untuk menjaga stabilitas populasi, maka penduduk dari wilayah tersebut akan semakin menua dan stabilitas populasi akan terganggu. Fenomena penurunan angka kelahiran mulai terlihat di beberapa kota di Indonesia, termasuk Kota Malang. Sebagai salah satu kota terbesar di Provinsi Jawa Timur

dan mempunyai julukan sebagai kota pendidikan, Kota Malang memiliki angka kelahiran total atau *Total Fertility Rate* (TFR) sebesar 1,75 anak per perempuan. Angka ini di bawah hasil TFR nasional yang tercatat dalam Survei Penduduk Antar Sensus (SUPAS) 2025, yaitu sebesar 2,13 anak per perempuan (BPS, 2026). Kondisi ini sesuai dengan karakteristik Malang yang didominasi oleh mahasiswa dan pekerja muda. Oleh karena itu, banyak orang menunda waktu menikah dan melahirkan anak dibandingkan dengan wilayah lain.

Saat ini, TFR yang telah berada di bawah angka nasional penting untuk ditinjau dampaknya terhadap struktur usia penduduk Kota Malang. Apabila kondisi ini terus berlanjut dalam jangka waktu yang panjang, hal ini akan menyebabkan perbandingan yang tidak seimbang antara penduduk usia muda dan usia lanjut. Jumlah penduduk usia muda cenderung semakin sedikit, sementara jumlah penduduk usia lanjut terus meningkat seiring berjalannya waktu, meskipun perubahan tersebut biasanya baru dapat terlihat dengan jelas setelah beberapa dekade. Berdasarkan data SP2020 BPS Provinsi Jawa Timur, persentase penduduk lanjut usia Kota Malang tercatat sebesar 11,04%. Angka ini termasuk rendah jika dibandingkan dengan Kabupaten Malang (14,20%) atau Kota Batu (12,43%) (BPS Provinsi Jawa Timur, 2020). Dengan kata lain, pengaruh rendahnya tingkat kelahiran (fertilitas) tiap kelompok usia penduduk Kota Malang belum sepenuhnya dapat diamati dalam kondisi saat ini, sehingga perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk memahami bagaimana perubahannya di masa depan.

Salah satu metode untuk mengatasi kebutuhan tersebut adalah matriks Leslie, yang berfokus pada anggota individu dari setiap kelompok usia daripada kelompok secara keseluruhan, sehingga memungkinkan pemahaman yang jelas tentang struktur usia suatu populasi. Pengaplikasian Matriks Leslie telah diterapkan dalam beberapa penelitian, yaitu oleh Anggreini dan Cahyandaru (2023) pada Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta berdasarkan usia dan harapan hidup perempuan, serta oleh Sanusi et al. (2018) untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan penduduk di Kota Makassar pada tahun 2017. Penelitian ini berbeda: Kota Malang dipilih karena gejala penuaannya belum diamati, sedangkan fertilitas rendah sudah terjadi. Akibatnya, penelitian ini bersifat antisipatif terkait risiko di masa depan, bukan sekadar menggambarkan secara akurat keadaan yang telah terjadi.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan mengonstruksi matriks Leslie berdasarkan data ASFR dan angka harapan hidup penduduk perempuan Kota Malang, memproyeksikan struktur usia penduduk perempuan Kota Malang pada tahun 2045, serta menganalisis laju pertumbuhan jangka panjang dan implikasinya terhadap risiko percepatan penuaan penduduk di Kota Malang.

METODE

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa jumlah penduduk perempuan Kota Malang berdasarkan kelompok umur lima tahunan yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Malang. Data tersebut digunakan sebagai dasar penyusunan vektor populasi awal dalam model Matriks Leslie. Selain itu, digunakan data *Age-Specific Fertility Rate* (ASFR) sebagai parameter fertilitas yang menggambarkan jumlah kelahiran berdasarkan kelompok umur ibu. Nilai ASFR diperoleh berdasarkan pola fertilitas yang disesuaikan dengan nilai *Total Fertility Rate* (TFR) Kota Malang (BPS, 2020).

Pengolahan data dilakukan menggunakan model Matriks Leslie untuk memproyeksikan perubahan jumlah dan struktur umur penduduk perempuan. Tahap awal dilakukan dengan menyusun jumlah penduduk perempuan berdasarkan 16 kelompok umur dengan interval lima tahunan sebagai vektor populasi awal. Data jumlah penduduk antar kelompok umur kemudian

digunakan untuk menghitung koefisien transisi umur yang menunjukkan perpindahan penduduk dari satu kelompok umur menuju kelompok umur berikutnya dalam periode lima tahun. Selanjutnya, nilai ASFR dikonversi menjadi koefisien fertilitas yang digunakan pada baris pertama Matriks Leslie, sedangkan koefisien transisi umur ditempatkan pada elemen sub diagonal matriks. Pengolahan data dilakukan menggunakan model Matriks Leslie untuk memproyeksikan perubahan jumlah dan struktur umur penduduk perempuan. Tahap awal dilakukan dengan menyusun jumlah penduduk perempuan berdasarkan 16 kelompok umur dengan interval lima tahunan sebagai vektor populasi awal. Data jumlah penduduk antar kelompok umur kemudian digunakan untuk menghitung koefisien transisi umur yang menunjukkan perpindahan penduduk dari satu kelompok umur menuju kelompok umur berikutnya dalam periode lima tahun. Selanjutnya, nilai ASFR dikonversi menjadi koefisien fertilitas yang digunakan pada baris pertama matriks Leslie, sedangkan koefisien transisi umur ditempatkan pada elemen sub diagonal matriks.

Matriks Leslie adalah matriks persegi yang menyajikan struktur umur penduduk dengan memperhitungkan tingkat kelahiran dan tingkat ketahanan hidup pada setiap kelompok umur (Anton & Rorres, 2014; Sanusi et al., 2018). Model ini diperkenalkan oleh P. H. Leslie pada tahun 1945. Penduduk perempuan dibagi menjadi k kelompok umur dengan lebar lima tahun, sehingga jarak antara waktu t dan waktu $t+1$ adalah lima tahun. Bentuk umum Matriks Leslie adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, k$$

$$b_i > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, k-1$$

Tingkat kesuburan perempuan yaitu perbandingan jumlah bayi perempuan yang lahir dengan jumlah penduduk perempuan pada kelompok umur ke- i pada waktu t , yang ditulis dengan persamaan

$$a_i = \frac{B_i}{n_i(t)}$$

dengan B_i adalah jumlah bayi perempuan yang dilahirkan oleh perempuan kelompok umur ke- i selama periode lima tahun dari waktu t hingga $t + 1$ dan $n_i(t)$ adalah jumlah penduduk perempuan kelompok umur ke- i pada waktu t . ASFR menyatakan jumlah kelahiran bayi (laki-laki dan perempuan) per 1.000 perempuan per tahun, sedangkan a_i memerlukan jumlah bayi perempuan selama lima tahun (Anton & Rorres, 2014; Preston et al., 2001). Oleh karena itu, nilai B_i dihitung dari ASFR dengan persamaan

$$B_i = 5 \left(\frac{ASFR_i}{1.000} \right) \left(\frac{100}{205} \right) n_i(t)$$

dengan 5 adalah lebar kelompok umur dalam tahun dan $100/205$ adalah proporsi bayi perempuan berdasarkan rasio jenis kelamin saat lahir sekitar 105 laki-laki per 100 perempuan (Preston et al., 2001). Perhitungan ini mengasumsikan jumlah perempuan pada tiap kelompok umur tidak berubah selama lima tahun dan seluruh bayi perempuan yang lahir bertahan hidup hingga akhir periode. Tingkat ketahanan hidup atau koefisien transisi umur (b_i) adalah

perbandingan jumlah penduduk perempuan kelompok umur ke- $(i + 1)$ pada waktu $t + 1$ dengan jumlah penduduk perempuan kelompok umur ke- i pada waktu t , yang ditulis sebagai

$$b_i = \frac{n_{i+1}(t + 1)}{n_i(t)}$$

Jumlah penduduk perempuan pada masing-masing kelompok umur pada waktu t dinyatakan dalam vektor $n(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_k(t)]^T$, dengan $n_1(t)$ adalah jumlah perempuan di kelompok umur pertama, $n_2(t)$ di kelompok umur kedua, dan seterusnya sampai $n_k(t)$ di kelompok umur ke- k . Pada waktu $t + 1$, jumlah perempuan di kelompok umur pertama adalah semua bayi perempuan yang dilahirkan oleh seluruh kelompok umur selama periode lima tahun dari waktu t hingga $t + 1$ dan bertahan hidup hingga waktu $t + 1$, sehingga dapat ditulis

$$n_1(t + 1) = a_1 n_1(t) + a_2 n_2(t) + \dots + a_k n_k(t)$$

Jumlah perempuan di kelompok umur ke- $(i + 1)$ pada waktu $t + 1$ berasal dari kelompok umur ke- i pada waktu t , sehingga dapat ditulis

$$n_{i+1}(t + 1) = b_1 n_1(t) + b_2 n_2(t) + \dots + b_{k-1} n_{k-1}(t)$$

Sehingga diperoleh persamaan $n(t + 1) = A \cdot n(t)$, yaitu

$$\begin{bmatrix} n_1(t + 1) \\ n_2(t + 1) \\ \vdots \\ n_{k-1}(t + 1) \\ n_k(t + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_{k-1}(t) \\ n_k(t) \end{bmatrix}$$

Matriks Leslie yang telah terbentuk digunakan untuk memprediksi populasi perempuan pada periode berikutnya, yaitu dengan persamaan

$$n(t + p) = A^p \cdot n(t)$$

dengan p adalah banyaknya periode lima tahun setelah waktu t (Anton & Rorres, 2014; Sanusi et al., 2018).

Hasil persamaan kemudian di analisis menggunakan nilai eigen untuk menentukan laju pertumbuhan populasi dan vektor eigen untuk mengetahui distribusi umur stabil penduduk perempuan (Anton & Rorres, 2014; Thomas & Clark, 2011). Nilai eigen matriks A adalah akar-akar persamaan karakteristik

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dari nilai eigen yang diperoleh, dicari nilai positif. Kemudian ditetapkan tiga kasus, yaitu:

1. Jika $\lambda > 1$, maka jumlah penduduk perempuan meningkat.
2. Jika $\lambda = 1$, maka jumlah penduduk perempuan stabil.
3. Jika $\lambda < 1$, maka jumlah penduduk perempuan menurun.

Vektor eigen v yang bersesuaian dengan λ diperoleh dari

$$(A - \lambda I) \cdot v = 0$$

dan dinormalisasi sehingga jumlah elemennya sama dengan satu, yang menunjukkan distribusi umur stabil. Analisis tersebut digunakan untuk menggambarkan perubahan jumlah penduduk dan struktur umur perempuan Kota Malang hingga tahun 2045.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah penduduk perempuan Kota Malang menurut kelompok umur pada tahun 2020 dan tahun 2025 yang bersumber dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Malang (BPS Kota Malang, 2025). Kedua tahun tersebut dipilih dengan

selisih lima tahun agar sesuai dengan lebar setiap kelompok umur yang digunakan pada Matriks Leslie, sehingga satu kali perkalian matriks dapat merepresentasikan pergeseran penduduk sejauh satu kelompok umur secara utuh. Data selengkapnya disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Jumlah Penduduk Perempuan Kota Malang Tahun 2020 dan 2025 (ribu jiwa)

Kelompok Umur	Tahun 2020	Tahun 2025
0-4	29,493	21,10
5-9	31,291	32,60
10-14	30,723	34,30
15-19	30,793	33,30
20-24	32,822	32,70
25-29	33,253	32,80
30-34	33,348	33,10
35-39	33,049	32,40
40-44	31,930	35,40
45-49	29,129	33,30
50-54	27,683	30,00
55-59	24,484	27,70
60-64	19,846	23,90
65-69	15,376	18,80
70-74	9,556	12,10
75+	11,133	15,10
Total	423,909	448,60

Sumber: BPS Kota Malang tahun 2020 dan 2025

Tabel 1 merupakan data dasar penelitian, yaitu jumlah penduduk perempuan Kota Malang pada setiap kelompok umur di tahun 2020 dan 2025. Data tahun 2025 menjadi populasi awal proyeksi, sedangkan perbandingan kedua tahun digunakan untuk menghitung koefisien ketahanan hidup. Berdasarkan jumlah penduduk perempuan pada tiap kelompok umur di Kota Malang pada Tabel 1, akan dilakukan estimasi terhadap dua parameter utama Matriks Leslie, dengan $i = 1, 2, \dots, 16$ menyatakan indeks kelompok umur secara berurutan mulai dari 0-4 tahun ($i = 1$) hingga 75+ tahun ($i = 16$). Untuk mengestimasi a_i digunakan Angka Kelahiran Menurut Umur (*Age Specific Fertility Rate/ASFR*) penduduk perempuan Kota Malang pada kelompok umur reproduktif 15-49 tahun, yaitu berturut-turut 9,7; 65,1; 121,5; 95,7; 55,0; 15,7; dan 1,8 kelahiran per 1.000 perempuan per tahun (BPS, 2020). Berdasarkan ASFR tersebut dan jumlah penduduk perempuan pada tahun 2025 (Tabel 1), dihitung estimasi jumlah kelahiran bayi selama periode lima tahun (2025-2030) sebagaimana disajikan pada Tabel 2. (Preston dkk., 2001).

Tabel 2. Estimasi Jumlah Kelahiran Bayi Perempuan Tahun 2025-2030 Menurut Kelompok Umur Ibu

Kelompok Umur Ibu	Populasi Perempuan 2025 (ribu)	ASFR (per 1.000)	Jumlah Kelahiran (ribu)	Jumlah Bayi Perempuan (ribu)
15-19	33,30	9,7	1,615	0,788
20-24	32,70	65,1	10,644	5,193
25-29	32,80	121,5	19,926	9,720
30-34	33,10	95,7	15,838	7,726
35-39	32,40	55,0	8,910	4,346
40-44	35,40	15,7	2,779	1,356
45-49	33,30	1,8	0,300	0,146
Total	—	—	60,012	29,275

Sumber: Hasil penelitian, 2026

Tabel 2 menunjukkan perkiraan jumlah kelahiran selama lima tahun dari setiap kelompok umur ibu, beserta jumlah bayi perempuannya. Kelompok umur 25-29 tahun menyumbang kelahiran bayi perempuan terbanyak, yaitu 9.720 ribu dari total 29.725 ribu, Sebagai contoh, koefisien fertilitas untuk kelompok umur 25-29 tahun ($i = 6$) dihitung sebagai berikut.

$$a_6 = \frac{B_6}{P_{6,2025}} = \frac{9.720}{32.800} \approx 0,2963$$

Penjumlahan ASFR pada Tabel 2 menghasilkan TFR tersirat sebesar anak per perempuan, yang berada di bawah TFR nasional, yaitu 2,13 anak per perempuan (BPS,2026). Kondisi ini mengindikasikan tingkat fertilitas Kota Malang yang relatif rendah, sebuah ciri khas kota yang mengarah pada struktur penduduk menua.

Kemudian, parameter kedua yaitu tingkat ketahanan hidup (b_i) yang diperoleh dengan membandingkan jumlah penduduk kelompok umur ke- $(i + 1)$ pada tahun 2025 dengan kelompok umur ke- i pada tahun 2020 (Tabel 1). Sebagai contoh, koefisien transisi dari kelompok 0-4 tahun menuju 5-9 tahun ($i = 1$) dihitung sebagai berikut.

$$b_1 = \frac{P_{2,2025}}{P_{1,2020}} = \frac{32.600}{29.493} \approx 1,105$$

Dengan cara yang sama, perhitungan a_i dan b_i untuk seluruh kelompok umur disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Tingkat Kesuburan (a_i) dan Tingkat Ketahanan Hidup (b_i) Penduduk Perempuan Kota Malang

Kelompok Umur	a_i	b_i
0-4	—	1,1053
5-9	—	1,0962
10-14	—	1,0839
15-19	0,0237	1,0619

20-24	0,1588	0,9993
25-29	0,2963	0,9954
30-34	0,2334	0,9716
35-39	0,1341	1,0711
40-44	0,0383	1,0429
45-49	0,0044	1,0299
50-54	—	1,0006
55-59	—	0,9761
60-64	—	0,9473
65-69	—	0,7869
70-74	—	1,5802
75+	—	—

Sumber: Hasil penelitian, 2026

Tabel 3 berisi nilai koefisien fertilitas dan ketahanan hidup untuk setiap kelompok umur. Nilai a_i hanya muncul pada kelompok usia reproduktif (15-49 tahun), sedangkan b_i muncul pada semua kelompok kecuali 75+. Nilai $b_{15} = 1,5802$ lebih besar dari 1 karena kelompok 75+ merupakan kelompok umur terbuka, yaitu kelompok umur yang tidak terbatas maksimal usia.

Berdasarkan nilai a_i dan b_i pada Tabel 3, disusun Matriks Leslie A berukuran 16×16 dengan baris pertama berisi nilai a_i pada kolom kelompok umur reproduktif dan subdiagonal berisi nilai b_i , sebagaimana disajikan berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0237 & 0,1588 & 0,2963 & 0,2334 & 0,1341 & 0,0383 & 0,0044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,1053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0839 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0619 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9954 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9716 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0711 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0299 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9761 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9473 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7869 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5802 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan proyeksi jumlah penduduk dengan populasi tahun 2025 sebagai populasi awal. Populasi awal dituliskan sebagai vektor $n(2025)$ berukuran 16×1 yang berisi jumlah penduduk perempuan pada tiap kelompok umur tahun 2025 (Tabel 1, dalam ribu jiwa). Proyeksi untuk lima tahun pertama ($p = 1$), yaitu tahun 2030, diperoleh dengan mengalikan Matriks Leslie A dengan $n(2025)$ sebagai berikut.

$$n(2025 + 5) = A \cdot n(2025)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0237 & 0,1588 & 0,2963 & 0,2334 & 0,1341 & 0,0383 & 0,0044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21,10 \\ 1,1053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29,27 \\ 0 & 1,0962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23,32 \\ 0 & 0 & 1,0839 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 34,30 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0619 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35,73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33,30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9954 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9716 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32,70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0711 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35,36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32,80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0299 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32,40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9761 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35,40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9473 & 0 & 0 & 0 & 34,70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7869 & 0 & 0 & 36,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5802 & 0 & 30,00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27,70 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 23,90 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 18,80 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 12,10 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 15,10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,10 \\ 29,27 \\ 23,32 \\ 34,30 \\ 35,73 \\ 33,30 \\ 37,18 \\ 32,70 \\ 35,36 \\ 32,80 \\ 33,10 \\ 32,40 \\ 35,40 \\ 34,70 \\ 36,92 \\ 30,00 \\ 27,70 \\ 23,90 \\ 18,80 \\ 12,10 \\ 15,10 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh prediksi jumlah penduduk perempuan dari usia di Kota Malang pada tahun 2030 dengan menjumlahkan seluruh kelas umur, sehingga diperoleh sebesar 448.600 jiwa. Hasil seluruh perkalian untuk tahun 2030 hingga 2045 disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Proyeksi Penduduk Perempuan Kota Malang per Kelompok Umur, 2025–2045 (ribu jiwa)

Kelompok Umur	2025	2030	2035	2040	2045
0-4	21,10	29,27	29,60	30,98	32,79
5-9	32,60	23,32	32,36	32,72	34,25
10-14	34,30	35,73	25,57	35,47	35,87
15-19	33,30	37,18	38,73	27,71	38,44
20-24	32,70	35,36	39,48	41,13	29,43
25-29	32,80	32,68	35,34	39,45	41,10
30-34	33,10	32,65	32,53	35,18	39,27
35-39	32,40	32,16	31,72	31,60	34,18
40-44	35,40	34,70	34,45	33,98	33,85
45-49	33,30	36,92	36,19	35,92	35,44
50-54	30,00	34,30	38,02	37,28	37,00
55-59	27,70	30,02	34,32	38,05	37,30
60-64	23,90	27,04	29,30	33,50	37,14
65-69	18,80	22,64	25,61	27,76	31,73
70-74	12,10	14,79	17,82	20,16	21,84
75+	15,10	19,12	23,38	28,15	31,85
Total	448,60	477,89	504,42	529,04	551,48

Sumber: Hasil penelitian, 2026

Total penduduk perempuan Kota Malang diproyeksikan meningkat dari 448.600 jiwa pada tahun 2025 menjadi 551.480 jiwa pada tahun 2045, atau bertambah 102.880 jiwa selama 20 tahun. Untuk melihat perkembangannya pada setiap periode, dihitung pertambahan dan laju pertumbuhan penduduk per periode lima tahunan. Diperhatikan bahwa:

$$\text{Laju pertumbuhan} = \frac{N(t+5) - N(t)}{N(t)} \times 100\%$$

dengan $N(t)$ adalah total penduduk perempuan pada tahun t , yaitu jumlah seluruh kelompok umur pada Tabel 4. Sebagai contoh, perhitungan untuk tahun 2025-2030 sebagai berikut.

$$\text{Laju pertumbuhan (2025-2030)} = \frac{N(2030)-N(2025)}{N(2025)} \times 100\% = \frac{477,89-448,60}{448,60} \times 100\% = 6,53\%$$

Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan pada lima tahun pertama penduduk perempuan bertambah 29,29 ribu jiwa atau 6,53% dari jumlah penduduk tahun 2025. Perhitungan yang sama dilakukan untuk periode-periode berikutnya dan hasilnya disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Pertumbuhan Total Penduduk Perempuan per Periode Lima Tahunan

Periode	Total (ribu jiwa)	Pertambahan (ribu jiwa)	Laju (%)
2025 (basis)	448,60	—	—
2030	477,89	29,29	6,53
2035	504,42	26,53	5,55
2040	529,04	24,62	4,88
2045	551,48	22,44	4,24

Sumber: Hasil penelitian, 2026

Tabel 5 menunjukkan pertambahan jumlah dan laju pertumbuhan penduduk perempuan pada tiap periode lima tahunan. Laju pertumbuhan melambat dari 6,53% pada 2025-2030 menjadi 4,24% pada 2040-2045, meskipun jumlah penduduk tetap bertambah.

Setelah proyeksi diperoleh, dilakukan analisis nilai eigen Matriks Leslie A dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$ sebagai berikut.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0,0237 & 0,1588 & 0,2963 & 0,2334 & 0,1341 & 0,0383 & 0,0044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,1053 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0962 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0839 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0619 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9993 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9954 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9716 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0711 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0429 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0299 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0006 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9761 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9473 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7869 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5802 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,032817 \\ 0,527719 + 0,764816i \\ 0,527719 - 0,764816i \\ -0,106987 + 0,585935i \\ -0,106987 - 0,585935i \\ -0,351909 + 0,524241i \\ -0,351909 - 0,524241i \\ -0,604390 \\ -0,283037 + 0,082412i \\ -0,283037 - 0,082412i \end{bmatrix}$$

Dari 16 nilai eigen di atas, nilai eigen yang dominan, yaitu nilai eigen yang real, positif, dan memiliki magnitudo terbesar adalah $\lambda_7 = 1,032817 \approx 1,0328$. Oleh karena $\lambda_7 > 1$, maka jumlah penduduk perempuan Kota Malang cenderung meningkat, dengan laju pertumbuhan jangka panjang sekitar 3,28% per periode lima tahun atau sekitar 0,65% per tahun. Laju pertumbuhan pada Tabel 5 yang terus melambat (dari 6,53% menjadi 4,24%) bergerak mendekati nilai ini.

Selanjutnya dicari vektor eigen $\mathbf{v}$ yang bersesuaian dengan λ_7 dari persamaan $(A - \lambda_7 I) \cdot \mathbf{v} = 0$. Persamaan tersebut menghasilkan hubungan

$$v_{i+1} = \frac{b_i v_i}{\lambda_7}$$

sehingga seluruh elemen vektor eigen dapat dihitung dari v_1 . Sebagai contoh, dengan $v_1 = 5,79\%$, elemen kedua adalah:

$$v_2 = \frac{b_1 v_1}{\lambda_7} = \frac{(1,1053)(5,79)}{1,0328} = 6,20\%$$

Setelah dinormalisasi sehingga jumlah seluruh elemennya sama dengan satu (100%), vektor eigen tersebut menyatakan struktur umur stabil yang disajikan pada Tabel 6.

Tabel 6. Presentase Kelompok Usia Stabil (Jangka Panjang) Penduduk Perempuan Kota Malang

Kelompok Usia	Proporsi
0-4	5,79%
5-9	6,20%
10-14	6,58%
15-19	6,90%
20-24	7,10%
25-29	6,87%
30-34	6,62%
35-39	6,23%

40-44	6,46%
45-49	6,52%
50-54	6,50%
55-59	6,30%
60-64	5,95%
65-69	5,46%
70-74	4,16%
75+	6,37%

Sumber: Hasil penelitian, 2026

Tabel 6 memperlihatkan proporsi penduduk perempuan pada tiap kelompok umur yang akan dicapai apabila pola a_i dan b_i saat ini berlangsung terus-menerus dalam jangka sangat panjang. Proporsi terbesar berada pada kelompok 20-24 tahun (7,10%) dan terkecil pada kelompok 70-74 tahun (4,16%), sedangkan proporsi kelompok 75+ (6,37%) lebih besar karena merupakan kelompok umur terbuka yang menampung seluruh penduduk berusia 75 tahun ke atas. Proporsi penduduk lansia (65 tahun ke atas) pada struktur umur stabil adalah $5,46\% + 4,16\% + 6,37\% = 15,99\%$. Angka ini lebih tinggi daripada proporsi lansia tahun 2025 sebesar 10,25% (46,00 dari 448,60 ribu jiwa) dan mendekati proporsi lansia hasil proyeksi tahun 2045 sebesar 15,49% (85,42 dari 551,48 ribu jiwa). Dengan pola fertilitas dan ketahanan hidup saat ini, struktur umur penduduk perempuan Kota Malang bergerak menuju struktur yang lebih menua.

Pembahasan

Hasil proyeksi menunjukkan bahwa penduduk perempuan Kota Malang mengalami pertumbuhan jumlah penduduk yang berlangsung bersamaan dengan proses penuaan pada setiap kelompok umur. Total penduduk perempuan diproyeksikan meningkat dari 448,60 ribu jiwa pada tahun 2025 menjadi 551,48 ribu jiwa pada tahun 2045, tetapi laju pertumbuhannya melambat dari 6,53% pada periode 2025–2030 menjadi 4,24% pada 2040–2045. Kondisi ini berkaitan dengan TFR tersirat sebesar 1,82 anak per perempuan yang berada di bawah *replacement level* 2,13 anak per perempuan (BPS, 2026). Temuan tersebut sesuai dengan konsep transisi demografi dan *population momentum*, yaitu penduduk masih dapat bertambah meskipun fertilitas telah rendah karena struktur umur awal masih memiliki kelompok usia reproduktif dalam jumlah relatif besar. Blue dan Espenshade (2011) menjelaskan bahwa momentum penduduk dapat mempertahankan pertumbuhan populasi selama proses transisi demografi meskipun fertilitas mengalami penurunan.

Proses penuaan semakin terlihat dari meningkatnya proporsi penduduk perempuan usia 65 tahun ke atas dari 10,25% pada tahun 2025 menjadi 15,49% pada tahun 2045, sementara proporsi usia produktif 15–64 tahun menurun dari 70,13% menjadi 65,85%. Perubahan tersebut juga terlihat dari meningkatnya rasio ketergantungan lansia dari 14,62 menjadi 23,52 serta indeks penuaan dari 52,27 menjadi 83,02. Hasil ini sejalan dengan Kudrna et al. (2022), yang menunjukkan bahwa transisi demografi Indonesia akan ditandai oleh semakin besarnya proporsi penduduk lanjut usia dan perubahan komposisi penduduk usia kerja. Dengan demikian, hasil penelitian ini memperkuat teori transisi demografi bahwa fertilitas rendah

dalam jangka panjang tidak hanya memengaruhi laju pertumbuhan penduduk, tetapi juga menggeser struktur umur menuju populasi yang lebih tua.

Analisis Matriks Leslie juga menunjukkan nilai eigen dominan sebesar 1,0328 dengan struktur usia stabil yang menghasilkan proporsi penduduk usia 65 tahun ke atas sebesar 15,99%. Nilai tersebut relatif dekat dengan hasil proyeksi tahun 2045 sebesar 15,49%, yang menunjukkan bahwa struktur penduduk perempuan Kota Malang telah bergerak menuju pola usia jangka panjang yang terbentuk dari parameter model. Hal ini sesuai dengan Thomas dan Clark (2011), yang menjelaskan bahwa Matriks Leslie dapat menggambarkan kecenderungan pertumbuhan serta distribusi umur stabil suatu populasi. Temuan ini tidak membentuk teori baru, tetapi memperkuat penerapan teori populasi stabil, *population momentum*, dan transisi demografi pada tingkat kota. Implikasinya, meningkatnya proporsi dan ketergantungan lansia perlu menjadi pertimbangan dalam perencanaan pelayanan kesehatan, perlindungan sosial, dan penguatan produktivitas penduduk usia kerja di Kota Malang.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil proyeksi secara khusus, jumlah penduduk perempuan Kota Malang meningkat dari 448,60 ribu jiwa pada tahun 2025 menjadi 551,48 ribu jiwa pada tahun 2045, namun laju pertumbuhan setiap periode lima tahunan mengalami perlambatan. Pada periode yang sama, proporsi penduduk perempuan berumur 65 tahun ke atas meningkat dari 10,25% menjadi 15,49%, sedangkan proporsi usia produktif menurun dari 70,13% menjadi 65,85%. Rasio ketergantungan lansia meningkat dari 14,62 menjadi 23,52 dan indeks penuaan meningkat dari 52,27 menjadi 83,02. Selain itu, struktur usia stabil hasil vektor eigen menunjukkan proporsi penduduk berumur 65 tahun ke atas sebesar 15,99%, yang relatif mendekati hasil proyeksi tahun 2045 sebesar 15,49%. Hasil tersebut menunjukkan bahwa meskipun jumlah penduduk perempuan Kota Malang masih meningkat, pergerakan tiap kelompok usia cenderung bergerak menuju populasi yang lebih tua. Apabila pola fertilitas dan transisi umur dalam model tetap berlangsung, proses penuaan penduduk diperkirakan berlanjut dalam jangka panjang. Berdasarkan hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa apabila pola fertilitas dan transisi umur yang digunakan dalam model tetap berlangsung, struktur penduduk perempuan Kota Malang cenderung mengalami penuaan secara bertahap dalam jangka panjang. Dengan demikian, Matriks Leslie menunjukkan bahwa pertumbuhan jumlah penduduk dapat tetap berlangsung bersamaan dengan pergeseran struktur umur menuju populasi yang semakin tua, sehingga perubahan demografi perlu dilihat tidak hanya berdasarkan jumlah penduduk, tetapi juga berdasarkan komposisi umurnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing serta semua pihak yang telah memberikan bimbingan, dukungan, dan bantuan selama proses penelitian dan penyusunan artikel ini. Segala kontribusi yang diberikan sangat membantu dalam penyelesaian penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Anggreini, D., & Cahyandaru, P. (2023). *Penerapan Matriks Leslie pada Angka Kelahiran dan Harapan Hidup Wanita di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta*.

Anton, & Rorres. (2014). *Elementary linear algebra: Applications version* (11th ed.). John Wiley & Sons.

- Blue, & Espenshade. (2011). Population momentum across the demographic transition. *Population and Development Review*, 37(4), 721–747.
- BPS. (2020). *Angka Kelahiran Hasil Long Form SP2020 Menurut Kelompok Umur Ibu (Age Specific Fertility Rate/ASFR) dan Provinsi/Kabupaten/Kota, 2020*.
<https://www.bps.go.id/id/statistics-table/1/MjIxNSMx/angka-kelahiran-hasil-long-form-sp2020-menurut-kelompok-umur-ibu-age-specific-fertility-rate-asfr-dan-provinsi-kabupaten-kota-2020.html>
- BPS. (2026, May 5). *SUPAS 2025: Angka Kelahiran Total (TFR) sebesar 2,13, Angka Kematian Bayi (IMR) sebesar 14,12, dan persentase lansia mencapai 11,97 persen*.
<https://www.bps.go.id/id/pressrelease/2026/05/05/2645/supas-2025--angka-kelahiran-total--tfr--sebesar-2-13---angka-kematian-bayi--imr--sebesar-14-12--dan-persentase-lansia-mencapai-11-97-persen-.html>
- BPS Kota Malang. (2025). *Jumlah penduduk (de jure) menurut kelompok umur dan jenis kelamin di Kota Malang*. <https://www.bps.go.id/id/statistics-table/1/MjIxNSMx/angka-kelahiran-hasil-long-form-sp2020-menurut-kelompok-umur-ibu-age-specific-fertility-rate-asfr-dan-provinsi-kabupaten-kota-2020.html>
- BPS Provinsi Jawa Timur. (2020). *Persentase Penduduk Lansia*.
<https://jatim.bps.go.id/id/statistics-table/2/Mzc5IzI=/persentase-penduduk-lansia.html>
- Kudrna, G., Le, T., & Piggott, J. (2022). Macro-Demographics and Ageing in Emerging Asia: the Case of Indonesia. *Journal of Population Ageing*, 15(1), 7–38.
<https://doi.org/10.1007/s12062-022-09358-6>
- Preston, Heuveline, & Guillot. (2001). *Demography: Measuring and modeling population*. Blackwell Publishers.
- Sanusi, W., Nur Ridiawati, dan, Matematika, J., & Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, F. (2018). Matriks Leslie dan Aplikasinya dalam Memprediksi Jumlah dan Laju pertumbuhan Penduduk di Kota Makassar. In *Journal of Mathematics* (Vol. 1, Number 2). <http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos>
- Thomas, J., & Clark, S. J. (2011). More on the Cohort-Component Model of Population Projection in the Context of HIV/AIDS: A Leslie Matrix Representation and New Estimates. *Demographic Research*, 25, 39–102.
<https://doi.org/10.4054/DemRes.2011.25.2>