

## PEMODELAN PENYEBARAN PENYAKIT HERPES GENITAL MELIBATKAN WAKTU TUNDA

### *MATHEMATICAL MODELING OF GENITAL HERPES INVOLVES TIME DELAY*

Oleh: Suhita Arum Bati<sup>1</sup>, Nikenasih Binatari, M.Si<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta

<sup>2</sup> Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta

E-mail : <sup>1</sup>[suhita61@gmail.com](mailto:suhita61@gmail.com), <sup>2</sup>[nikenasih@uny.ac.id](mailto:nikenasih@uny.ac.id)

#### **Abstrak**

Herpes merupakan salah satu penyakit yang menular secara vertikal dan horizontal. Penyakit herpes disebabkan oleh virus yang disebut *Herpes Simplex Virus* (HSV). Virus herpes simplek ini dibagi menjadi dua tipe, yaitu tipe I (HSV-I) yang menyerang daerah sekitar mulut dan tipe II (HSV-II) yang menyerang daerah genital dan sekitarnya. Pada makalah ini akan dibahas tentang pemodelan penyebaran herpes genital melibatkan waktu tunda. Penelitian menggunakan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) yang dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927, kemudian menentukan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, menganalisa kestabilan dipersekitaran titik ekuilibrium, dan menginterpretasikan model dengan melakukan simulasi model penyebaran penyakit herpes genital. Waktu tunda terjadi pada populasi sebelum individu masuk ke dalam kelas *Susceptible*. Individu yang masuk ke dalam kelas *Susceptible* adalah individu yang telah berusia 14 tahun dan kematian yang terjadi adalah kematian alami. Hasil yang diperoleh yaitu apabila laju infeksi semakin mengecil maka semakin lama penyakit akan semakin berkurang atau menghilang dari populasi, sebaliknya apabila laju infeksi semakin besar maka penyakit akan terus menyebar ke dalam populasi.

KataKunci : herpes genital, waktu tunda, titik ekuilibrium

#### **Abstract**

*Herpes is one of the communicable diseases that are vertically and horizontally. Herpes is caused by a virus called Herpes Simplex Virus (HSV). Herpes virus simplek is divided into two types, i.e. Type I (HSV-I) that attacked the area around the mouth and type II (HSV-II) that attacks the genital area and beyond. On this paper will be discussed about modeling the spread of genital herpes involves a time delay. Research using model SIR (Susceptible-Infected-Recovered) formulated by Kermack and McKendrick in 1927, then determines the equilibrium point, the basic reproduction number, analyzes the stability of the equilibrium point of the dipersekitaran, and interpret the model by performing a simulation model of the spread of disease genital herpes. A delay occurred in the population before the individual enters into the Susceptible class. Individuals belonging to the Susceptible class are individuals who have aged 14 years and death that occurred was a natural death. The results obtained, namely when the rate of infection is increasingly dwarfed by the long illness will progressively diminish or disappear from the population, otherwise in the rate of infection is higher then the disease will continue to spread in the population.*

*Keywords : genital herpes, time delay, equilibrium*

## PENDAHULUAN

Penyakit yang menular secara terus menerus melalui individu yang terinfeksi ke individu yang sehat merupakan suatu masalah yang sangat diperhatikan oleh negara maupun dunia. Penularan penyakit bisa terjadi melalui interaksi di dalam rantai infeksi baik secara langsung maupun tidak langsung. Salah satu contoh penyakit menular adalah penyakit herpes. Herpes merupakan salah satu penyakit menular secara vertikal (keturunan) dan horizontal (kontak langsung maupun tidak langsung). Penyakit herpes disebabkan oleh virus yang disebut *Herpes Simplex Virus* (HSV). Virus herpes simplek ini dibagi menjadi dua tipe, yaitu tipe I (HSV-I) yang menyerang daerah sekitar mulut dan tipe II (HSV-II) yang menyerang daerah genital dan sekitarnya. Herpes genital merupakan salah satu infeksi menular seksual yang sulit untuk disembuhkan, bersifat kambuhan, dan dapat terjadi tanpa ada gejala.

Pada tahun 2003, dari data *World Health Organization* (WHO) diperoleh bahwa secara keseluruhan terdapat 536 juta individu usia 15-49 tahun hidup dengan HSV-2. Jumlah yang terinfeksi meningkat sebanding dengan usia yaitu pada usia 25-39 tahun. Penelitian tentang herpes genital yang dilakukan oleh Podder (2013) menyebutkan bahwa terdapat sekitar 22% dari populasi di Amerika Serikat terinfeksi dengan HSV-2.

Pada penyebaran penyakit menular terdapat beberapa metode yang dapat digunakan diantaranya model SIS, SIR, SEIR, SEIRS, MSEIR dan sebagainya (Murray, 1989). Dalam penelitian ini model yang digunakan adalah model SIR, yaitu *Susceptible* (kelas rentan), *Infected* (kelas terinfeksi), dan *Recovered* (kelas sembuh), yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick (1927), dengan kemungkinan individu yang telah dinyatakan sembuh masih dapat kembali kambuh satu kali dalam satu tahun.

## METODE PENELITIAN

Metode penelitian dalam makalah ini menggunakan metode literatur untuk mempelajari hal-hal yang berhubungan dengan model SIR dan penyakit herpes genital. Penelitian diawali dengan menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model. Setelah itu dibentuk model matematika epidemi SIR, menentukan titik ekuilibrium model, menghitung bilangan reproduksi dasar, menyelidiki sifat kestabilan titik ekuilibrium model, dan menganalisis secara numerik dengan melakukan simulasi.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyebaran penyakit yang terjadi menyebabkan individu dibagi menjadi beberapa kelas dalam suatu populasi. Pada model SIR populasi dibagi menjadi 3 kelas, yaitu:

- a. Kelas  $S$  (*susceptible*) menyatakan kelas individu rentan

- b. Kelas I (*infected*) menyatakan kelas individu terinfeksi
- c. Kelas R (*recovered*) menyatakan kelas individu sembuh.

Pada pemodelan yang akan dibentuk digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

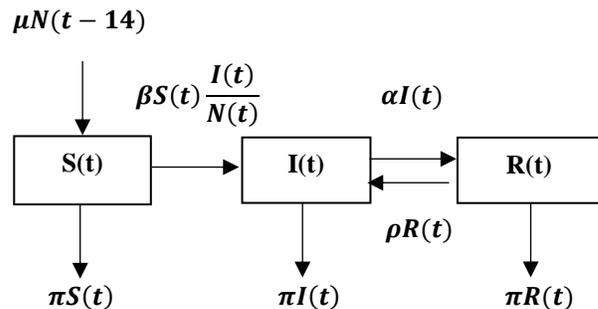
- a. Dalam populasi tidak terjadi migrasi
- b. Terjadi kelahiran dan kematian, dimana kelahiran hanya terjadi pada kelas *Susceptible* dengan syarat individu tersebut berusia 14 tahun
- c. Penyakit tidak menyebabkan kematian, kematian yang terjadi pada setiap kelas adalah kematian alami
- d. Penularan penyakit terjadi akibat kontak langsung dengan penderita
- e. Setiap individu memiliki frekuensi kambuh sebanyak satu kali dalam satu tahun
- f. Masa inkubasi sangat cepat sehingga diabaikan

Tabel 1 Parameter-parameter yang digunakan dalam Model SIR Penyakit Herpes Genital

Simbol	Definisi
$\mu$	Laju kelahiran pada kelas <i>Susceptible</i>

$N(t - 14)$	Banyaknya individu pada saat $t - 14$
$\pi S$	Laju kematian alami pada kelas <i>Susceptible</i>
$\pi I$	Laju kematian alami pada kelas <i>Infected</i>
$\pi R$	Laju kematian alami pada kelas <i>Recovered</i>
$\beta$	Laju kontak antara kelas <i>Susceptible</i> dan kelas <i>Infected</i>
$\alpha$	Laju kesembuhan dari penyakit
$\rho$	Presentase individu yang kambuh

Berdasarkan asumsi-asumsi dan parameter-parameter yang telah diuraikan tersebut maka dapat dibentuk diagram transfer model SIR sebagai berikut:



Gambar 1 Diagram Transfer Model SIR Penyebaran Penyakit Herpes Genital dengan Waktu Tunda

Dari Gambar 1, persamaan model SIR penyebaran penyakit herpes genital adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S(t) \frac{I(t)}{N(t)} + \mu N(t - 14) \\ &\quad - \pi S(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t) \frac{I(t)}{N(t)} - \pi I(t) - \alpha I(t) \\ &\quad + \rho R(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I(t) - \pi R(t) - \rho R(t). \end{aligned} \quad 1$$

Diberikan  $N(t)$  menyatakan total populasi pada saat  $t$ , maka

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t). \quad 2$$

Untuk mengetahui bahwa total populasi tidak konstan, maka dicari turunan pertama dari  $N(t)$ . Substitusikan Sistem (1) ke dalam Persamaan (2), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt}, \\ &= \mu N(t - 14) - \pi N(t). \end{aligned} \quad 3$$

Karena turunan pertama dari  $N(t)$  tidak sama dengan nol, maka total populasi tidak konstan. Untuk menyederhanakan Sistem (1) akan dibentuk proporsi banyaknya individu disetiap kelas dengan total populasi. Masing-masing kelas dapat dinyatakan sebagai  $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$ , dengan  $s + i + r = 1$ . Maka, proporsi banyaknya individu pada

masing-masing kelas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\beta s(t)i(t) + \mu n(t - 14) \\ &\quad - \mu n(t - 14)s(t), \\ \frac{di(t)}{dt} &= \beta s(t)i(t) - \alpha i(t) + \rho r(t) \\ &\quad - \mu n(t - 14)i(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} &= \alpha i(t) - \rho r(t) \\ &\quad - \mu n(t - 14)r(t). \end{aligned} \quad 4$$

### Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium adalah titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Untuk mencari titik ekuilibrium, Sistem (4) dibuat dalam keadaan konstan, yaitu pada saat  $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0$ . Maka, diperoleh dua titik ekuilibrium sebagai berikut:

1. Untuk  $\hat{i} = 0$ , diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai berikut:

$$\hat{s} = 1, \hat{i} = 0, \hat{r} = 0 \quad 5$$

2. Untuk  $\hat{i} \neq 0$ , diperoleh titik ekuilibrium endemik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\alpha\mu + \rho\mu + \mu^2}{\beta(\rho + \mu)} \\ i^* &= -\frac{\alpha\mu - \beta\rho - \beta\mu + \mu^2 + \rho\mu}{\beta(\mu + \alpha + \rho)} \\ r^* &= -\frac{\alpha(\alpha\mu - \beta\rho - \beta\mu + \mu^2 + \rho\mu)}{\beta(\alpha\mu + \alpha\rho + \mu^2 + 2\rho\mu + \rho^2)} \end{aligned} \quad 6$$

### Bilangan Reproduksi Dasar ( $\mathcal{R}_0$ )

Bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ) digunakan untuk menentukan apakah dalam suatu populasi akan terjadi endemik atau bebas dari penyakit. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan subpopulasi kelas terinfeksi dan titik ekuilibrium bebas penyakit.

$$\frac{di(t)}{dt} = \beta(t)i(t) - \alpha i(t) + \rho r(t) - \mu n(t)i(t). \quad 6$$

Dengan menggunakan metode *next generation matrix* diperoleh bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\alpha + \mu}. \quad 7$$

### Analisis Kestabilan

Titik-titik ekuilibrium dari Sistem (4) adalah  $E = (\hat{s}, \hat{i}, \hat{r})$ , maka Sistem (4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\beta \hat{s} \hat{i} + \mu - \mu \hat{s}, \\ f_2 &= \beta \hat{s} \hat{i} - \alpha \hat{i} + \rho \hat{r} - \mu \hat{i}, \\ f_3 &= \alpha \hat{i} - \rho \hat{r} - \mu \hat{r}. \end{aligned} \quad 8$$

Selanjutnya, Sistem (8) dapat dilinearisasikan dengan mencari turunannya terhadap  $\hat{s}, \hat{i}, \hat{r}$  sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta \hat{i} - \mu & -\beta \hat{s} & 0 \\ \beta \hat{i} & \beta \hat{s} - \alpha - \mu & \rho \\ 0 & 0 & \frac{(-\rho - \mu)(\beta \hat{s} - \alpha - \mu) - \alpha \rho}{\alpha(\beta \hat{s} - \alpha - \mu)} \end{bmatrix}$$

Analisis kestabilan bebas penyakit dipersekitaran  $E_0 = (\hat{s}, \hat{i}, \hat{r}) = (1, 0, 0)$  adalah

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - \alpha - \mu & \rho \\ 0 & 0 & \frac{(-\rho - \mu)(\beta - \alpha - \mu) - \alpha \rho}{\alpha(\beta - \alpha - \mu)} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian diatas, maka matriks Jacobian dapat di tulis sebagai berikut:

$$\det|\lambda I - J_0| = 0,$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & \beta & 0 \\ 0 & \beta - \alpha - \mu & \rho \\ 0 & 0 & \frac{(-\rho - \mu)(\beta - \alpha - \mu) - \alpha \rho}{\alpha(\beta - \alpha - \mu)} \end{bmatrix} \right| = 0,$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda + \mu & -\beta & 0 \\ 0 & \lambda - \beta + \alpha + \mu & \rho \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{(-\rho - \mu)(\beta - \alpha - \mu) - \alpha \rho}{\alpha(\beta - \alpha - \mu)} \end{bmatrix} \right| = 0.$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor disepanjang kolom pertama diperoleh

$$(\lambda + \mu)(\lambda - \beta + \alpha + \mu) \left( \lambda - \frac{(-\rho - \mu)(\beta - \alpha - \mu) - \alpha \rho}{\alpha(\beta - \alpha - \mu)} \right) = 0$$

Diperoleh nilai eigennya adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu \\ \lambda_2 &= \beta - \alpha - \mu \\ \lambda_3 &= -\frac{\mu^2 + \alpha\mu + \rho\mu - \beta\mu - \beta\rho}{\alpha(-\beta + \alpha + \mu)} \end{aligned} \quad 9$$

Berikut diberikan teorema sifat kestabilan untuk titik ekuilibrium bebas penyakit

Teorema 1

- a. Jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (\hat{s}, \hat{i}, \hat{r}) = (1, 0, 0)$  stabil asimtotik.
- b. Jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (\hat{s}, \hat{i}, \hat{r}) = (1, 0, 0)$  tidak stabil.

Bukti

- a. Untuk  $\mathcal{R}_0 < 1$ , maka  $\lambda_2$

$$\frac{\beta}{\alpha + \mu} < 1,$$

$$\beta < \alpha + \mu,$$

$$\beta - \alpha - \mu < 0.$$

Oleh karena itu, Persamaan (9) semuanya bernilai negatif. Sehingga terbukti jika  $\mathcal{R}_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (\hat{s}, \hat{i}, \hat{r}) = (1, 0, 0)$  stabil asimtotik.

- b. Untuk  $\mathcal{R}_0 > 1$ , maka  $\lambda_2$

$$\frac{\beta}{\alpha + \mu} > 1,$$

$$\beta > \alpha + \mu,$$

$$\beta - \alpha - \mu > 0.$$

Oleh karena itu, Persamaan (9) ada satu atau lebih nilai eigen yang bernilai positif. Sehingga terbukti jika  $\mathcal{R}_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (\hat{s}, \hat{i}, \hat{r}) = (1, 0, 0)$  tidak stabil.

### Simulasi Numerik

Pada tahun 2013, menurut Chandra Nath Podder, 22% dari pepolasi di Amerika Serikat terinfeksi dengan herpes genital. Total populasi di Amerika Serikat pada tahun 2013 adalah sebanyak 316,2 juta jiwa. Penderita herpes genital berumur antara 14 tahun sampai dengan 49 tahun, dan jumlah kematian karena penyakit herpes genital 0. Individu yang berusia 14 tahun pada saat  $t$  adalah 27,5 juta jiwa.

Tabel 2 Data Nilai Awal Kelas SIR

No.	Proporsi Awal Kelas (t=0)	Jumlah Populasi (juta)	Presentase Kasus
1.	Proporsi Kelas Rentan $s(0)$	11,55	16,6
2.	Proporsi Kelas Infeksi $i(0)$	27,84	40

3.	Proporsi Kelas Recovered $r(0)$	30,21	43,4
	Total Populasi	69,6	1

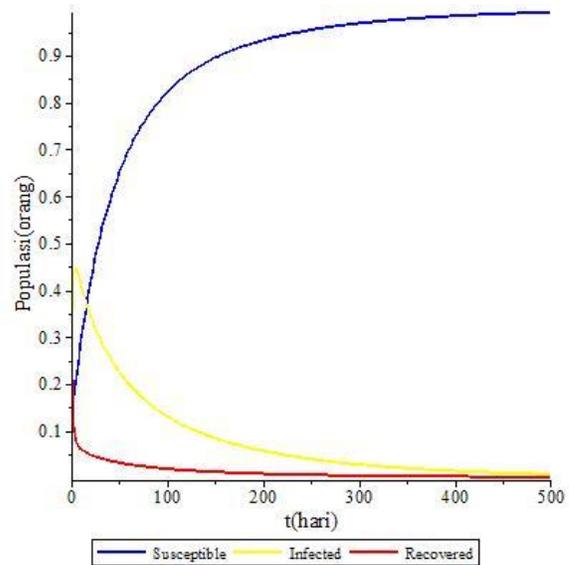
Tabel 3 Nilai Parameter-Parameter dalam Model Penyebaran Penyakit Herpes Genital

Parameter	Nilai	Definisi
$\mu$	0,087	Laju kelahiran individu
$\alpha$	0,077	Laju penyembuhan penyakit herpes genital (1/masa penyembuhan)
$\rho$	0,53	Presentase individu yang kambuh
$n(t - 14)$	27,51	Banyaknya individu pada saat $t - 14$

Kemudian untuk parameter  $\beta$  merepresentasikan laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi herpes genital. Nilai parameter ini dapat bervariasi sesuai dengan kondisi nilai  $\mathcal{R}_0$ .

a. Simulasi  $\mathcal{R}_0 < 1$

Untuk nilai parameter  $\beta = 0,02$ , diperoleh nilai  $0,1219512195 < 1$

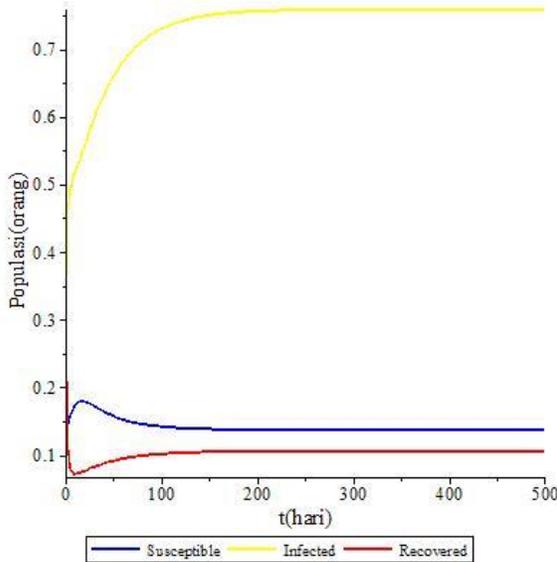


Gambar 2 Simulasi Penyebaran penyakit Herpes Genital pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan gambar, terlihat bahwa proporsi individu rentan (*Susceptible*) semakin lama semakin meningkat menuju 1. Sementara pada saat  $t$  membesar populasi individu terinfeksi (*Infected*) dan populasi individu sembuh (*Recovered*) semakin lama semakin menurun menuju ke nol. Hal ini menunjukkan bahwa perilaku solusi akan bergerak menuju titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, i, r) = (1, 0, 0)$ . Sehingga pada saat  $\mathcal{R}_0 < 1$ , semakin lama penyebaran penyakit herpes genital akan menghilang dari populasi.

b. Simulasi  $\mathcal{R}_0 > 1$

Untuk nilai parameter  $\beta = 0,2$ , diperoleh nilai  $1,219512195 > 1$



Gambar 3 Simulasi Penyebaran Penyakit Herpes Genital pada Titik Ekuilibrium Endemik

Dari Gambar 3 terlihat bahwa populasi *susceptible* semakin menurun kurang lebih setelah  $t = 30$  dan populasi *infected* meningkat jauh melebihi populasi *susceptible* ketika  $t = 10$ . Pada Gambar 3, populasi *recovered* juga terlihat meningkat sehingga penyakit herpes genital akan menjadi endemik. Pada kondisi setimbang tersebut, penyakit akan selalu ada dalam populasi hingga waktu yang tidak terbatas. Nilai numerik untuk kondisi setimbang yaitu  $E_1 = (s^*, i^*, r^*) = (0.4893, 0.4540, 0.0567)$ . Titik  $E_1$  merupakan titik ekuilibrium endemik.

Berdasarkan simulasi pada Gambar 2 dan Gambar 3 terlihat bahwa proporsi individu terinfeksi dan proporsi individu sembuh semakin meningkat sebanding dengan  $\beta$ . Hal ini berarti, jika laju kontak antara individu rentan semakin membesar maka tingkat penyebaran penyakit herpes genital dalam populasi juga akan semakin membesar.

**KESIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model matematika untuk penyebaran penyakit herpes genital berupa persamaan diferensial orde satu. Waktu tunda terjadi sebelum individu masuk ke dalam kelas *Susceptible*. Model yang diperoleh sebagai berikut:
 
$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\beta s(t)i(t) + \mu n(t - 14) \\ &\quad - \mu n(t - 14)s(t), \\ \frac{di(t)}{dt} &= \beta s(t)i(t) - \alpha i(t) + \rho r(t) \\ &\quad - \mu n(t - 14)i(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} &= \alpha i(t) - \rho r(t) - \mu n(t - 14)r(t). \end{aligned}$$
2. Berdasarkan hasil simulasi analisis numerik pada penderita herpes genital, dengan nilai awal dan parameter yang diberikan diperoleh

bahwa semakin besar laju kontak antara individu rentan maka semakin tinggi tingkat penyebaran penyakit.

## SARAN

Banyak hal yang belum tercakup dalam penelitian ini. Perlu dikaji lebih lanjut untuk analisis kestabilan pada titik ekuilibrium endemik dan kestabilan model epidemi lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adhi Djuanda. 1999. *Ilmu Penyakit Kulit dan Kelamin*. Jakarta: Fakultas FKUI.
- Anton Howard. 1988. *Penerapan Aljabar Linear*. Penerjemah Silaban. P. Penerbit Erlangga
- Hendrawan, I Wayan, Pandu, Tridana Sakti. 2017. Venereologi G2P1A0H0 32-33 Minggu dengan Herpes Genitalis. *Jurnal Kedokteran Unram*. Hlm. 50-54.
- Jatmiko, Andri Catur, Firdausi Nurharini, Dian Kencana Dewi, Dwi Murtiastutik. (2009). Penderita Herpes Genitalis di Divisi Infeksi Menular Seksual Unit Rawat Jalan Kesehatan Kulit dan Kelamin RSUD Dr. Soetomo Surabaya 2005-2007. *Berkala Ilmu Kesehatan Kulit & Kelamin*. Vol. 21. Surabaya.
- Kermack, W.O. & McKendrick, A. G. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Mathematical and Physical Character*. Hlm. 700-721.
- Li Mingming, Xianning Liu. 2014. An SIR Epidemic Model with Time Delay and General Nonlinear Incidence Rate. *Hindawi Publishing Corporation*. Volume 2014, Article ID 131257.
- Podder, Chandra Nath. (2013). Dynamics of Herpes Simplex Virus Type 2 in a Periodic Environment. Department of Mathematics. University of Dhaka. Bangladesh.
- Sari, Ilmiyati & Tasman, Hengki. 2014. Model Epidemik SIR untuk Penyakit yang Menular Secara Horizontal dan Vertikal. *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII*. Surabaya: ITS.
- World Health Organization. (2017). Media Centre: Herpes Simplex Virus. Diakses dari: <http://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/herpes-simplex-virus>. Pada tanggal 30 Mei 2018.