Jurnal Kajian dan Terapan Matematika
Volume 10, Edisi 1, Bulan Maret 2024, 82 - 87
http://journal.student.uny.ac.id/ojs/index.php/jktm

Dimensi Metrik Lokal pada Graf Garis dari Graf Persahabatan

Local Metric Dimension of Line Graph of Friendship Graph

Fithri Annisatun Lathifah*, Prodi Matematika FMIPA UNY
*e-mail: annisatunlathifah@uny.ac.id

Abstrak
Diberikan suatu graf terhubung $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi di G. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ subhimpunan terurut tak kosong dari $V(G)$. Untuk sebarang $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap W yang dinotasikan $r(v|W)$ didefinisikan sebagai k-vektor $(d_G(v, w_1), d_G(v, w_2), \dots, d_G(v, w_k))$ dengan $d_G(v, w_i)$ adalah panjang lintasan $v - w_i$ terpendek untuk $i \in \{1,2,3 \dots, k\}$. Bilangan kardinal k dari W yang minimum sehingga untuk setiap dua titik yang bertetangga di G memiliki representasi yang berbeda disebut sebagai dimensi metrik lokal dari G, dinotasikan dengan $lmd(G)$. Graf garis $L(G)$ dari graf G adalah graf yang dikonstruksi dengan mengambil semua sisi di G sebagai titik-titik pada $L(G)$, dan dua titik pada $L(G)$ bertetangga jika kedua sisi pada G yang bersesuaian dengan kedua titik tersebut mempunyai titik bersama. Graf persahabatan F_n dengan $2n + 1$ titik adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan n salin C_3 dengan satu titik bersama. Dalam artikel ini diperoleh bahwa dimensi metrik lokal pada graf garis dari graf persahabatan adalah $lmd(L(F_n)) = 2n - 1$.
Kata kunci: dimensi metrik lokal, graf garis, graf persahabatan.

Abstract
Given a connected graph $G = (V(G), E(G))$ where $V(G)$ is the vertex set and $E(G)$ is the edge set of G. Let $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ be an ordered nonempty subset of vertices of $V(G)$. For a vertex $v \in V(G)$, representation of vertex v with respect to W, denoted by $r(v|W)$, is the k-vector $(d_G(v, w_1), d_G(v, w_2), \dots, d_G(v, w_k))$ where $d_G(v, w_i)$ is the length of a shortest $v - w_i$ path for $i \in \{1,2,3, .., k\}$. A cardinal number k of W which is minimum such that for every two adjacent vertices of G has distinct representations with respect to W is called a local metric dimension of G, denoted by $lmd(G)$. Line graph $L(G)$ of graph G is a graph that results from taking the edges of G as vertices in $L(G)$ and two vertices of $L(G)$ are adjacent if the corresponding edges of G share a vertex. Friendship graph F_n with $2n + 1$ vertices is agraph obtained by taking n copies of the cycle graph C_3 with a vertex in common. In this research, we obtained that the local metric dimension of Friendship graph is $lmd(L(F_n)) = 2n - 1$.
***Keywords**: local metric dimension, line graph, friendship graph.*

PENDAHULUAN

Harary & Melter (1976) dalam artikelnya yang berjudul "*On the metric dimension of a graph*" memperkenalkan konsep himpunan pembeda dari suatu graf terhubung. Sebelumnya, Slater (1975) telah memperkenalkan konsep serupa tetapi dengan istilah yang berbeda, yang dikenal dengan istilah himpunan lokasi. Dari keduanya didapatkan bahwa permasalahan yang melibatkan himpunan pembeda atau himpunan lokasi yaitu mencari kardinalitas terkecil dari himpunan tersebut. Kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda ini dikenal sebagai dimensi metrik.

Seiring berjalannya waktu, penelitian tentang dimensi metrik banyak dilakukan oleh para peneliti. Khuller *et al.* (1996) memberikan ilustrasi penerapan dimensi metrik pada bidang robotika. Bagaimana suatu robot dapat mendeteksi posisinya secara unik jika mengetahui jaraknya terhadap serangkaian *landmark*. Kemudian Chartrand *et al*. (2000) menjelaskan aplikasi dimensi metrik pada bidang kimia untuk menentukan klasifikasi struktur senyawa. Sebo & Tannier (2004) menggunakan hasil deteksi *false coins* untuk memperkirakan dimensi metrik dari kelas graf tertentu.

Untuk sebarang graf terhubung G, jika $W \subseteq V(G)$ adalah himpunan pembeda maka setiap titik di G akan memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Ini artinya setiap titik di G dapat dibedakan. Selain metode ini, dalam teori graf juga terdapat konsep pewarnaan titik untuk membedakan setiap dua titik yang bertetangga di graf tersebut. Banyak warna minimal yang dibutuhkan sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda kita kenal sebagai bilangan kromatik. Berawal dari ide pewarnaan ini, Okamoto *et al.* (2010) memperkenalkan konsep yang sama, namun dengan menggunakan representasi jarak, bukan dengan pewarnaan, untuk membedakan setiap dua titik yang bertetangga di suatu graf. Konsep inilah yang disebut sebagai dimensi metrik lokal.

Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ subhimpunan terurut tak kosong dari $V(G)$. Untuk sebarang $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap W yang dinotasikan $r(v|W)$ didefinisikan sebagai k-vektor $(d_G(v, w_1), d_G(v, w_2), \dots, d_G(v, w_k))$ dengan $d_G(v, w_i)$ adalah panjang lintasan $v - w_i$ terpendek untuk $i \in \{1,2,3 \dots, k\}$. Bilangan kardinal k dari W yang minimum sehingga untuk setiap dua titik yang bertetangga $u, v \in V(G)$, $r(u|W) \neq r(v|W)$ disebut sebagai dimensi metrik lokal dari G, dinotasikan dengan $lmd(G)$.

Dalam artikelnya, Okamoto *et al*. (2010) juga telah memberikan karakterisasi graf yang memiliki dimensi metrik lokal tertentu. Graf yang memiliki dimensi metrik lokal 1 hanyalah graf bipartit, sedangkan graf yang memiliki dimensi metrik lokal $n - 1$ hanyalah graf lengkap K_n. Okamoto *et al*. (2010) juga menunjukkan bahwa sebarang graf terhubung G dengan orde $n \geq 3$ memiliki dimensi metrik lokal $n - 2$ jika dan hanya jika $\omega(G) = n - 1$ dengan $\omega(G)$ menyatakan orde dari subgraf lengkap terbesar dari G. Hingga sekarang, sudah banyak penelitian tentang dimensi metrik lokal untuk beberapa kelas graf, diantaranya dimensi metrik lokal dari graf hasil kali berakar (Rodríguez-Velázquez *et al*., 2015); graf hasil operasi korona (Rodríguez-Velázquez *et al*., 2016); graf lolipop, graf jaring laba-laba, dan graf persahabatan (Cahyabudi & Kusmayadi 2017); serta dimensi metrik lokal dari graf sirkulan (Pitoy, 2018).

Dari banyaknya penelitian tentang dimensi metrik lokal, akhirnya penulis tertarik untuk membahas dimensi metrik lokal pada suatu graf garis. Graf garis $L(G)$ dari graf G adalah graf yang dikonstruksi dengan mengambil semua sisi di G sebagai titik-titik pada $L(G)$, dan dua titik pada $L(G)$ bertetangga jika kedua sisi pada G yang bersesuaian dengan kedua titik tersebut mempunyai titik bersama. Sebelumnya, Feng *et al.* (2013) telah meneliti dimensi metrik dari graf garis. Oleh karena itu, pada artikel ini akan dibahas dimensi metrik lokal pada graf garis dari suatu kelas graf tertentu, yaitu graf persahabatan. Graf persahabatan F_n dengan $2n + 1$ titik adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan n salin C_3 dengan satu titik bersama.

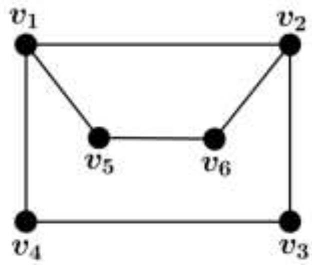
METODE

Pada bagian ini akan diberikan pembahasan mengenai dimensi metrik lokal dan karakterisasi graf terhubung yang memiliki dimensi metrik lokal tertentu. Untuk mempermudah penulisan, didefinisikan $[a,n] = \{x \in Z: a \leq x \leq n\}$.

Misalkan G graf terhubung tak trivial dan misalkan pula $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ subhimpunan terurut tak kosong dari $V(G)$. Jika untuk setiap dua titik berbeda yang bertetangga u dan v di G berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda lokal dari G. Suatu himpunan pembeda lokal dari G dengan kardinalitas terkecil disebut basis metrik lokal dari graf G. Kardinalitas dari basis ini disebut dimensi metrik lokal dari graf G dan dinotasikan dengan $lmd(G)$. Jika setiap dua titik berbeda di G memiliki representasi yang berbeda terhadap suatu $W \subseteq V(G)$ maka jelas bahwa setiap dua titik yang bertetangga di G juga memiliki representasi yang berbeda terhadap W sehingga himpunan pembeda juga merupakan himpunan pembeda lokal. Akibatnya untuk suatu graf terhubung tak trivial G dengan orde n diperoleh ketaksamaan

$$1 \leq lmd(G) \leq dim(G) \leq n - 1.$$

Untuk memahami ilustrasi konsep dimensi metrik lokal, perhatikan graf G pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf G

Misalkan $W = \{v_3\}$. Representasi setiap titik di G terhadap W yaitu $r(v_1|W) = (2)$, $r(v_2|W) = (1), r(v_3|W) = (0), r(v_4|W) = (1), r(v_5|W) = (3)$, dan $r(v_6|W) = (2)$. Perhatikan bahwa tidak ada pasangan titik bertetangga yang memiliki representasi yang sama terhadap W, sehingga W adalah himpunan pembeda lokal di graf G. Karena $|W| = 1$ maka W merupakan basis metrik lokal dari G sehingga $lmd(G) = 1$.

Okamoto *et al*., (2010) juga membahas dimensi metrik lokal dari beberapa kelas graf sebagai berikut.

Teorema 1. (Okamoto *et al*., 2010) Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial dengan orde n, maka
(i) $lmd(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$,
(ii) $lmd(G) = 1$ jika dan hanya jika G bipartit.

Teorema 2. (Okamoto *et al*, 2010) Jika G suatu graf terhubung dengan orde $n \geq 3$ maka $lmd(G) = n - 2$ jika dan hanya jika $\omega(G) = n - 1$.

Teorema 3. (Okamoto *et al*., 2010) Jika G suatu graf k-partit lengkap dengan $k \geq 2$ maka $lmd(G) = k - 1$.

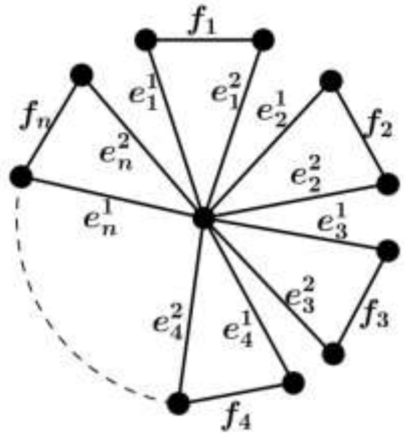
Teorema 4. (Okamoto *et al*., 2010) Untuk setiap dua graf terhubung G dan H, $lmd(G \times H) = maks\{lmd(G), lmd(H)\}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut adalah hasil dan pembahasan mengenai dimensi metrik lokal pada graf garis dari graf persahabatan F_n.

Teorema. Misalkan F_n adalah graf persahabatan dengan $n \geq 2$, maka $lmd(L(F_n)) = 2n - 1$.

Bukti. Misalkan $E(F_n) = \{e_i^1, e_i^2, f_i : i \in [1, n]\}$ dengan e_i^1 dan e_i^2 adalah sisi-sisi yang terkait ke titik yang berderajat $\Delta(F_n)$, sedangkan f_i adalah sisi yang bertetangga dengan e_i^1 dan e_i^2 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Graf persahabatan F_n

Untuk $i, j \in [1, n]$ dan $k, l \in [1,2]$ diperoleh

$$d_{L(F_n)}(e_i^k, e_j^l) = \begin{cases} 0, \text{jika } i = j \text{ dan } k = l; \\ 1, \text{lainnya.} \end{cases}$$

$$d_{L(F_n)}(e_i^k, f_j) = \begin{cases} 1, \text{jika } i = j; \\ 2, \text{lainnya.} \end{cases}$$

Pilih $W = \{e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1, e_1^2, e_2^2, \dots, e_{n-1}^2\}$. Akibatnya hanya ada 2 sisi yang bertetangga di $E(F_n) \backslash W$, yaitu e_n^2 dan f_n. Perhatikan bahwa

$$r(e_n^2|W) = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{2n-1}) \neq (\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-1},1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-1}) = r(f_n|W).$$

Dengan demikian W merupakan himpunan pembeda lokal dari $L(Fn)$ sehingga $lmd(L(F_n)) \leq 2n - 1$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $lmd(L(F_n)) \geq 2n - 1$. Andaikan $|W| = m \leq 2n - 2$ dengan $m \geq 1$. Misalkan $E_1 = \{e_i^1, e_i^2 : i \in [1, n]\}$ dan $E_2 = \{f_i : i \in [1, n]\}$. Notasikan $W_1 = E_1 \cap W$ dan $W_2 = E_2 \cap W$. Tanpa mengurangi keumuman, pilih $|W_1| > 0$ dan $|W_2| \geq 0$. Karena $|E_1| = 2n$ dan $|W_1| \leq m$ maka $|E_1 \backslash W| \geq 2n - m \geq 2$. Ini berarti terdapat paling sedikit dua sisi di $E_1 \backslash W$. Akan ditunjukkan dua sisi berbeda yang bertetangga $e_i^k, e_j^l \in E_1 \backslash W$ berlaku $r(e_i^k|W) = r(e_j^l|W)$ untuk suatu $i, j \in [1, n]$ dan $k, l \in [1,2]$. Terdapat 2 kasus sebagai berikut.

Kasus 1. $e_i^1, e_i^2 \in E_1 \backslash$W, maka diperoleh

$$d_{L(F_n)}(e_i^1, v) = d_{L(F_n)}(e_i^2, v) = \begin{cases} 1, \text{jika } v \in W_1 \text{ atau } v = f_i \in W_2; \\ 2, \text{jika } v \in W_2 \backslash \{f_i\}. \end{cases}$$

Dengan demikian $\mathrm{r}(e_i^1|\mathrm{W}) = \mathrm{r}(e_i^2|\mathrm{W})$.

Kasus 2. Untuk setiap $i \in [1, n]$, terdapat paling sedikit salah satu dari e_i^1 atau e_i^2 adalah sisi di W_1. Tanpa mengurangi keumuman, pilih $e_i^1 \in W_1$ untuk setiap $i \in [1, n]$. Ini berarti terdapat dua sisi berbeda $e_i^2, e_j^2 \in E_1 \backslash$W. Akibatnya, karena $m \leq 2n - 2$ maka $|W_2| \leq \mathrm{m} - \mathrm{n} \leq \mathrm{n} - 2$ sehingga $|E_2 \backslash W| \geq n - (m - n) = 2n - m \geq 2$. Klaim bahwa terdapat dua sisi berbeda $e_i^2, e_j^2 \in E_1 \backslash W$ dengan $f_i, f_j \in E_2 \backslash W$ untuk suatu $i, j \in [1, n]$. Andaikan paling banyak ada satu $e_i^2 \in E1 \backslash W$ dengan $f_i \in E_2 \backslash W$ untuk suatu $i \in [1, n]$. Misalkan $|\{e_i^2 : e_i^2 \in E_1 \backslash W\}| = a$. Karena untuk setiap $i \in [1, n], e_i^1 \in W$ dan $|E_1 \backslash W| \geq 2$ maka $a \geq 2$. Diperoleh

$$|A| = |\{e_i^2 : e_i^2 \in W_1\}| = n - a;$$

$$|B| = |\{f_i : f_i \in W_2\}| \geq a - 1.$$

Akibatnya $|A| + |B| \geq n - 1$. Hal ini kontradiksi bahwa $|A| + |B| = |A| + |W_2| = |W| - n \leq (2n - 2) - n = n - 2$. Dengan demikian terdapat 2 sisi berbeda $e_i^2, e_j^2 \in E_1 \backslash W$ dengan $f_i, f_j \in E_2 \backslash W$ untuk suatu $i, j \in [1, n]$ sehingga

$$d_{L(F_n)}(e_i^2, v) = d_{L(F_n)}(e_j^2, v) = \begin{cases} 1, \text{jika } v \in W_1; \\ 2, \text{jika } v \in W_2. \end{cases}$$

Ini berarti $\mathrm{r}(e_i^2|\mathrm{W}) = \mathrm{r}(e_j^2|\mathrm{W})$.

Jadi haruslah $lmd(L(F_n)) \geq 2n - 1$ sehingga $lmd\big(L(F_n)\big) = 2n - 1$.

SIMPULAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh bahwa dimensi metrik lokal pada graf garis dari graf persahabatan F_n bergantung pada nilai n. Untuk $n \geq 2$, dimensi metrik lokal pada graf garis dari graf persahabatan F_n yaitu $lmd(L(F_n)) = 2n - 1$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan doa, dukungan, dan bimbingan sehingga artikel ini selesai.

DAFTAR PUSTAKA

Cahyabudi, A. N. & Kusmayadi, T. A. (2017). On the local metric dimension of a lollipop graph, a web graph, and a friendship graph. *J. Phys.: Conf. Ser.* **909** 012039. https://doi.org/10.1088/1742-6596/909/1/012039

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A. & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105, 99-113. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(00)00198-0

Feng, M., Xu, M. & Wang, K. (2013). On the metric dimension of line graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161, 802-805. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.10.018

Harary, F. & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*, 2, 191-195.

Khuller, S., Raghavachari, B. & Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 77, 217-229. https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00106-2

Okamoto, F., Crosse, L., Phinezy, B., Zhang, P. & Kalamazoo (2010). The local metric dimension of a graph. *Mathematica Bohemica*, 3, 239-255. http://dx.doi.org/10.21136/MB.2010.140702

Pitoy, C. R. (2018). Dimensi Metrik Lokal dari Graf Sirkulan, Tesis Program Magister. Institut Teknologi Bandung.

Rodríguez-Velázquez, J.A., Barragán-Ramírez, G.A. & García Gómez, C. (2016). On the Local Metric Dimension of Corona Product Graphs. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **39** (Suppl 1), 157–173. https://doi.org/10.1007/s40840-015-0283-1

Rodríguez-Velázquez, J. A., García Gómez, C., & Barragán-Ramírez, G. A. (2015). Computing the local metric dimension of a graph from the local metric dimension of primary subgraphs. *International Journal of Computer Mathematics*, *92*(4), 686–693. https://doi.org/10.1080/00207160.2014.918608

Sebő, A. &Tannier, E. (2004). On Metric Generators of Graphs. *Mathematics of Operations Research*, *29*(2), 383- 393. https://doi.org/10.1287/moor.1030.0070

Slater, P. J. (1975). *Leaves of trees*. Proceedings 6th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 14, 549-559.