ANALISIS KESTABILAN MODEL *SEII$_T$ (SUSCEPTIBLE-EXPOSED-ILL-ILL WITH TREATMENT)* PADA PENYAKIT DIABETES MELLITUS

STABILITY ANALYSIS OF SEII$_T$ MODEL (SUSCEPTIBLE-EXPOSED-ILL-ILL WITH TREATMENT) ON DIABETES MELLITUS DISEASES

Oleh: Hesti Endah Lestari[1)], Dwi Lestari[2)], Husna 'Arifah[3)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
[1)]13305144002@student.uny.ac.id, [2)]dwilestari.math@gmail.com , [3)]husna.uny@gmail.com

Abstrak

Diabetes mellitus merupakan penyakit tidak menular mematikan yang penyebaran berasal dari dalam diri setiap individu yang gaya hidupnya pasif dan tidak sehat serta memiliki pola makan yang tidak baik. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan model matematika masalah penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan. Selanjutnya menganalisa kapan penyakit akan menghilang atau tetap ada dalam populasi. Tahapan analisis yaitu menjelaskan pembentukan model *SEII$_T$ (Susceptible-Exposed-ILL-ILL with treatment)*, dilanjutkan dengan menentukan titik ekuilibrium dan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0), menganalisa kestabilan di sekitar titik ekuilibrium dan melakukan simulasi dengan menggunakan MAPLE berdasarkan data dari Kota Yogyakarta tahun 2014. Dari hasil analisa dapat disimpulkan bahwa penyebaran penyakit diabetes mellitus dipengaruhi oleh laju kontak infektif individu yang rentan terhadap individu yang laten, laju rekrutmen, dan laju kematian alami, dengan kata lain peningkatan laju perpindahan individu laten terhadap individu sakit tanpa perawatan hanya mempengaruhi perilaku solusi dalam menuju titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya pada kasus di Kota Yogyakarta, populasi yang terjangkit diabetes mellitus akan semakin berkurang atau bahkan menghilang jika nilai dari laju kontak infektif individu yang rentan terhadap individu yang laten kurang dari 0.0000075, sebaliknya penyakit diabetes mellitus akan tetap ada dalam populasi jika nilai dari laju kontak infektif individu yang rentan terhadap individu yang laten lebih dari 0.0000075. Berdasarkan simulasi yang dibentuk dari model *SEII$_T$*, diperoleh kesimpulan jika laju kontak infektif individu yang rentan menjadi individu yang laten semakin besar, maka tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus semakin besar.

Kata Kunci**:** diabetes mellitus, model *SEII$_T$*, dan analisis kestabilan.

Abstract

Diabetes mellitus is a disease that is not contagious deadly where spread of comes from within each individual who is passive and his lifestyle is unhealthy and has a diet that is not good. This study aims to explain the mathematical model of disease spread of diabetes mellitus without genetic factors with treatment. Furthermore, to analyze when the disease will disappear or remain in the population. The stages of the analysis model is to explain the formation of the SEII$_T$ (Susceptible-Exposed-ILL-ILL with treatment), to find the point of equilibrium, to determine the basic reproduction number (R_0), to analyze the stability around the equilibrium points, and to perform simulations using MAPLE based on data from the city of Yogyakarta in 2014. From the results of the analysis it can be concluded that the spread of diabetes mellitus is influenced by the rate of infective contacts of individuals susceptible to the individual latent, the recruitment rate, and the natural death rate. In other words, an increase in the rate of displacement of the individual who are sick without treatment against individual laten only affects the behavior of the solution in the direction of the endemic equilibrium point. Furthermore, on the case in Yogyakarta, infected populations of diabetes mellitus will decrease or even disappear if the value of the rate of infective contacts of individual susceptible to the individuals latent is less than 0.0000075, otherwise diabetes mellitus will remain in the population. Based on the simulation model which was formed from SEII$_T$, obtained a conclusion if the more the rate of infective contacts of individual susceptible to the individuals latent, the more the rate of spread of the disease diabetes mellitus.

*Keywords**:** diabetes mellitus, model SEII$_T$, and stability analysis.*

PENDAHULUAN

Diabetes mellitus adalah penyakit yang ditandai dengan kadar gula darah yang tinggi yang disebabkan oleh gangguan pada sekresi dan kinerja insulin yaitu tidak dapat memproduksi atau tidak dapat merespon hormon insulin yang dihasilkan oleh organ pankreas, sehingga menyebabkan kadar gula darah meningkat dan dapat menyebabkan komplikasi jangka pendek maupun jangka panjang. Penyakit ini membutuhkan perawatan seumur hidup dan tidak ada pengobatan yang pasti untuk menyembuhkannya (Subroto, 2006).

Kota Yogyakarta adalah salah satu kota yang memiliki konsekuensi meningkatnya angka kesakitan pada penyakit diabetes mellitus. Penderita diabetes mellitus terus meningkat dari tahun ke tahun. Berdasarkan data dari Profil Kesehatan Kota Yogyakarta tahun 2015, jumlah penduduk di Kota Yogyakarta pada tahun 2014 berjumlah 413936 jiwa. Penderita diabetes mellitus tipe II untuk di Kota Yogyakarta berjumlah 2891 jiwa dan 1816 jiwa diantaranya mendapatkan perawatan (Dinkes, 2015).

Diabetes mellitus dibagi menjadi beberapa tipe. Diabetes mellitus tipe I disebabkan oleh faktor bawaan atau keturunan. Sementara itu, faktor penyebab diabetes mellitus tipe II adalah faktor pola hidup yang tidak aktif serta pola makan yang tidak sehat. Diabetes mellitus gestasional adalah penyakit diabetes yang terjadi pada ibu hamil, yang disebabkan oleh gangguan toleransi glukosa pada pasien tersebut. Berdasarkan tipe diabetes mellitus yang telah dijelaskan, peneliti akan membahas diabetes mellitus tipe II ini karena dipandang bahwa besar kemungkinan tidak akan menyebar jika pola hidup serta pola makan diatur dan dijaga dengan baik, dan untuk yang telah terjangkit besar kemungkinan akan lebih lama bertahan hidup jika mendapatkan perhatian dan perawatan secara medis ataupun mengubah dan memodifikasi gaya hidup.

Penderita diabetes mellitus tipe I maupun tipe II juga dapat diatasi. Menurut Hardiman (2009) disebutkan bahwa pendekatan yang dilakukan adalah upaya nonmedis dengan cara modifikasi gaya hidup misalnya dengan diet serta olahraga dan untuk upaya medis melalui terapi insulin dan obat penurun gula. Perawatan dan pencegahan yang dapat dilakukan oleh penderita diabetes mellitus adalah melakukan perubahan pada gaya hidup seperti melakukan olahraga secara teratur, istirahat dengan cukup, serta terapi insulin dan mengkonsumsi obat penurun kadar gula sesuai anjuran dokter, dan perubahan pola makan serta mengkonsumsi makanan yang seimbang serta sesuai dengan kebutuhan gizi dari masing-masing individu.

Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan khususnya untuk bidang matematika ikut berperan dalam memodelkan dan menganalisis sebuah model matematika yang mempelajari tentang penyebaran penyakit diabetes mellitus khususnya untuk diabetes mellitus tipe II. Penyebaran penyakit diabetes mellitus tipe II ini adalah dari dalam diri masing-masing individu yang memiliki gaya hidup tidak aktif dan tidak sehat serta tidak dapat mengatur pola makan.

Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang mengkaji tentang model matematika diabetes mellitus. Boutayep dkk (2006) dalam sebuah paper tentang model matematis diabetes mellitus nonlinear menganalisis proses perubahan diabetes mellitus sampai tahap komplikasi. Komplikasi yang terjadi ini bukan karena dampak dari ekonomi, sosial, dan implikasi medis. Pada model ini ditentukan titik kestabilan yang kemudian diberikan perhitungan numerik menggunakan MATLAB untuk memperkirakan ukuran populasi penderita diabetes mellitus dan jumlah penderita diabetes mellitus dengan komplikasi. Makrogou & Kuang (2006) menjelaskan tentang mekanisme sistem regulasi glukosa-insulin. Salah satu modelnya digunakan dalam penelitian fisiologis untuk memperkirakan efektivitas glukosa dan sensitivitas insulin. Julia Ulfah dkk (2014) membahas tentang model $SEII_T$ *(Susceptible-Exposed-ILL-ILL with treatment)* untuk penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan. Pada model tersebut, kompartemen S *(Susceptible)* ditransformasi ke dalam kompartemen N (populasi total) sehingga dalam analisis tidak melibatkan kompartemen S *(Susceptible)*. Dari hasil analisis didapatkan parameter yang paling berpengaruh dalam penyebaran penyakit diabetes mellitus adalah laju kelahiran. Dengan demikian penyebaran penyakit diabetes mellitus dapat dikendalikan dari kejadian epidemi dengan $R_0 < 1$ atau menurunkan laju kelahiran.

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai model matematika pada penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan menggunakan model $SEII_T$ *(Susceptible-Exposed-ILL-ILL with treatment)*. Analisis numerik pada model matematika dari penyebaran penyakit diabetes mellitus ini menggunakan data di Kota Yogyakarta tahun 2014. Dengan model tersebut akan dianalisa penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan. Adapun langkahnya yaitu membentuk model yang berbentuk sistem persamaan diferensial kemudian dicari titik kritisnya (titik kesetimbangan). Selanjutnya, dicari bilangan reproduksi dasar dan melakukan simulasi dengan menggunakan Maple.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Perumusan Masalah Nyata

Diabetes mellitus dapat menyerang semua lapisan umur dan sosial ekonomi, hal ini dipengaruhi oleh gaya hidup masyarakat yang tidak sehat seperti pola makan tidak seimbang, kurang aktivitas fisik, dan kebiasaan merokok (Depkes RI, 2008). Berdasarkan hal tersebut penyebaran dari penyakit diabetes mellitus tipe II adalah dari dalam masing-masing individu yang bergantung pada gaya hidup yang dijalankannya. Faktor risiko dari diabetes melitus tipe II adalah faktor kegemukan yang meliputi perubahan gaya hidup dari tradisional ke gaya hidup barat, makan berlebihan, dan hidup santai atau kurang aktif (Suyono, 2011). Pencegahan terkena diabetes mellitus dapat dilakukan beberapa cara seperti program penurunan berat badan, diet sehat, berolahraga secara teratur, dan menghentikan merokok. Penyakit diabetes mellitus tidak dapat disembuhkan tetapi hanya dapat diatasi penyebarannya. Individu baru dapat masuk ke dalam populasi karena adanya rekrutmen dan meninggalkan populasi karena kematian. Populasi total adalah semua individu yang rentan, individu laten yaitu individu yang memiliki kebiasaan buruk, penurunan hormon insulin, dan peningkatan glukosa darah, individu yang sudah terkena diabetes mellitus tetapi tidak mendapat perawatan, dan individu yang sudah terkena diabetes mellitus tetapi mendapat perawatan. Laju rekrutmen yang baru menambah populasi individu rentan dalam populasi. Gaya hidup tidak sehat dari individu laten akan mempengaruhi gaya hidup dari individu rentan yang menyebabkan individu rentan menjadi masuk ke populasi individu laten. Laju pengaruh gaya hidup ini kemudian yang disebut laju kontak infektif.

Model matematika pada penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan, populasi manusia pada waktu t terbagi dalam 4 kelompok yaitu *susceptible* (populasi rentan), *exposed* (populasi laten), kelas *ILL* (populasi sakit) yang tidak mendapat perawatan *(I)*, dan kelas *ILL* (populasi sakit) yang mendapat perawatan (I_T). Individu yang termasuk dalam subpopulasi *susceptible* adalah individu belum terkena diabetes mellitus. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *exposed* adalah individu yang memiliki kebiasaan buruk, penurunan hormon insulin, dan peningkatan glukosa darah, sehingga besar kemungkinan individu tersebut akan terkena dampak dan gejala dari diabetes mellitus. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *ILL* adalah individu yang sudah terkena diabetes mellitus tetapi tidak mendapat perawatan. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *ILL with treatment* adalah individu yang sudah terkena diabetes mellitus tetapi mendapat perawatan.

Formulasi Model

Untuk mempermudah dalam memodelkan penyebaran penyakit diabetes mellitus khususnya pada penderita yang mengidap diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

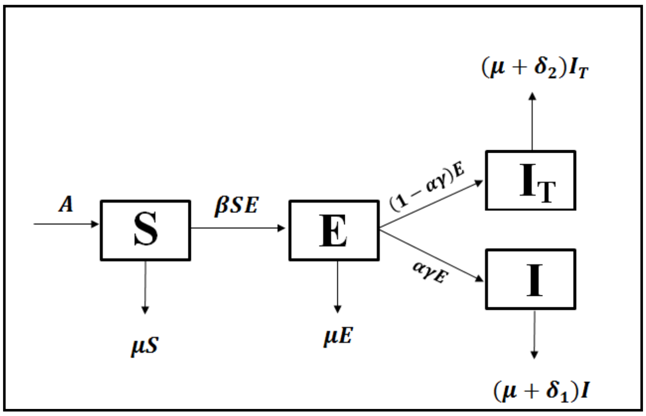
1. Individu yang telah sakit tidak dapat disembuhkan.
2. Pengaruh migrasi diabaikan sehingga penyebaran penyakit bersifat tertutup dalam suatu populasi.
3. Tidak adanya faktor genetik yang mempengaruhi penyebaran penyakit diabetes mellitus sehingga tergolong diabetes mellitus tipe II.
4. Dengan adanya perawatan akan memperpanjang usia hidup penderita.
5. Rekruitmen masuk kelas *S (Susceptible).*
6. Individu yang memiliki kebiasaan buruk, penurunan hormon insulin, dan peningkatan glukosa darah masuk kelas *E (Exposed).*
7. Individu yang telah sakit dan tidak mendapatkan perawatan masuk kelas *I (ILL).*
8. Individu yang telah sakit dan mendapatkan perawatan masuk kelas I_T *(ILL with Treatment).*
9. Terjadi kematian akibat penyakit diabetes mellitus baik penderita yang mendapat perawatan atau tidak mendapat perawatan.

Berikut ini didefinisikan variabel dan parameter yang digunakan dalam model penyakit diabetes mellitus disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Variabel dan Parameter

Simbol	Definisi	Syarat	Satuan
$S(t)$	Jumlah individu *susceptible* pada saat t	$S(t) \geq 0$	individu
$E(t)$	Jumlah individu *exposed* pada saat t	$E(t) \geq 0$	individu
$I(t)$	Jumlah individu sakit pada saat t	$I(t) \geq 0$	individu
$I_T(t)$	Jumlah individu sakit dengan perawatan pada saat t	$I_T(t) \geq 0$	individu
$N(t)$	Jumlah individu dalam populasi	$N(t) \geq 0$	individu
A	Laju rekrutmen pada populasi	$A > 0$	$\frac{\text{individu}}{\text{waktu}}$
μ	Laju kematian alami	$0 < \mu < 1$	$\frac{1}{\text{waktu}}$
β	Laju kontak infektif individu yang rentan terhadap individu yang laten	$0 < \beta < 1$	$\frac{\left(\frac{1}{\text{individu}}\right)}{\text{waktu}}$
$\alpha\gamma$	Laju perpindahan individu laten terhadap individu sakit tanpa perawatan	$0 < \alpha\gamma < 1$	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$1-\alpha\gamma$	Laju perpindahan individu laten terhadap individu sakit dengan adanya perawatan	$0 < 1-\alpha\gamma < 1$	$\frac{1}{\text{waktu}}$
δ_1	Laju kematian akibat penyakit tanpa perawatan	$0 < \delta_1 < 1$	$\frac{1}{\text{waktu}}$
δ_2	Laju kematian akibat penyakit dengan adanya perawatan	$0 < \delta_2 < 1$	$\frac{1}{\text{waktu}}$

Berdasarkan asumsi-asumsi, variabel-variabel, dan parameter-parameter dapat dibentuk diagram alir berikut:



Gambar 1. Diagram Alir Model Matematika Penyakit Diabetes Mellitus tanpa Faktor Genetik dengan Perawatan

Berdasarkan diagram alir pada Gambar 1 terbentuk model penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - \mu S - \beta SE \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SE - \mu E - E \qquad (1.1)\\ \frac{dI}{dt} &= \alpha\gamma E - (\mu + \delta_1)I \\ \frac{dI_T}{dt} &= (1-\alpha\gamma)E - (\mu + \delta_2)I_T.\end{aligned}$$

Adapun jumlah populasi total tidak konstan, ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dI_T}{dt}$$
$$= A - \mu N - \delta_1 I - \delta_2 I_T.$$

dengan $N = S + E + I + I_T$.

Titik Ekuilibrium

Titik $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T})$ merupakan titik-titik ekuilibrium dari Sistem (1.1) jika memenuhi persamaan $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dI_T}{dt} = 0$.

Teorema 1.1

i. *Jika* $E = 0$, *maka Sistem* (1.1) *memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu* $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$.

ii. *Jika* $E \neq 0$, *maka Sistem* (1.1) *memiliki titik ekuilibrium endemik* $P_1 = (S^*, E^*, I^*, {I_T}^*)$ *yaitu*

$$S^* = \frac{\mu + 1}{\beta}$$

$$E^* = \frac{\beta A - \mu(\mu + 1)}{\beta(\mu + 1)}$$

$$I^* = \frac{\alpha\gamma(\beta A - \mu^2 - \mu)}{\beta(\mu^2 + \mu + \mu\delta_1 + \delta_1)}$$

$${I_T}^* = \frac{(1 - \alpha\gamma)(\beta A - \mu^2 - \mu)}{\beta(\mu^2 + \mu + \mu\delta_2 + \delta_2)}.$$

dengan $\beta A > \mu(\mu + 1)$.

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai harapan dari individu menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu terinfeksi primer. Dari Sistem Persamaan (1.1) diperoleh:

$$R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\mu + 1)}.$$

Analisis Kestabilan Sistem

Pada subbab ini, akan dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium dari Sistem (1.1).

Teorema 1.2

i. *Jika* $R_0 < 1$ *maka titik ekuilibrium bebas penyakit* $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ *stabil asimtotik lokal.*

ii. *Jika* $R_0 > 1$ *maka titik ekuilibrium bebas penyakit* $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ *tidak stabil.*

Bukti:

Akan dicari nilai eigen pada titik ekuilibrium bebas penyakit dengan mendefinisikan Sistem (1.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1 = A - \mu S - \beta SE \\
\dot{x}_2 &= f_2 = \beta SE - \mu E - E \qquad (1.2) \\
\dot{x}_3 &= f_3 = \alpha\gamma E - (\mu + \delta_1)I \\
\dot{x}_4 &= f_4 = (1 - \alpha\gamma)E - (\mu + \delta_2)I_T
\end{aligned}$$

Maka matriks *Jacobian* dari Sistem Persamaan (1.2) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial I_T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial I_T} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial I_T} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial I_T} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta E & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta E & \beta S - \mu - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & -(\mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & 1 - \alpha\gamma & 0 & -(\mu + \delta_2) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $R_0 < 1$, titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Substitusi titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ ke Persamaan (1.3) akan diperoleh matriks *Jacobian* di sekitar titik ekuilibrium P_0. Nilai eigen matriks *Jacobian* di sekitar titik ekuilibrium P_0 dapat dicari dengan menyelesaikan $det(J(P_0) - \lambda I) = 0$ dan didapatkan

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = (\mu + 1)(R_0 - 1)$$

$$\lambda_3 = -(\mu + \delta_1)$$

$$\lambda_4 = -(\mu + \delta_2).$$

Jelas λ_1, λ_3, dan λ_4 bernilai negatif, karena μ, δ_1, dan δ_2 bernilai positif. Selanjutnya berdasarkan yang diketahui bahwa $R_0 < 1$, maka λ_2 bernilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa semua nilai eigen bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Jika diketahui $R_0 > 1$, maka diperoleh nilai eigen dari λ_2 adalah positif. Berdasarkan hal tersebut, maka titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ tidak stabil.■

Teorema 1.3

Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik $P_1 = (S^*, E^*, I^*, {I_T}^*)$ stabil asimtotik local.

Bukti:

Substitusi titik ekuilibrium endemik P_1 ke Persamaan (1.3) akan diperoleh matriks *Jacobian* di sekitar titik ekuilibrium P_1. Nilai eigen matriks *Jacobian* di sekitar titik ekuilibrium P_1 dapat dicari dengan menyelesaikan $det(J(P_1) - \lambda I) = 0$ dan didapatkan

$$\lambda_1 = -(\mu + \delta_2)$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \delta_1).$$

Jelas nilai eigen dari λ_1 dan λ_2 bernilai negatif karena μ, δ_1, dan δ_2 bernilai positif. Untuk nilai eigen yang lainnya sebagai berikut:

$$\lambda^2 + (\mu R_0)\lambda + \mu(\mu + 1)(R_0 - 1) = 0. \qquad (1.4)$$

Untuk nilai eigen yang lainnya, akan digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk melihat sifat akar-akar karakteristiknya dan diperoleh semua nilai eigennya bernilai negatif apabila terpenuhi $R_0 > 1$, sehingga terbukti bahwa jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik P_1 stabil asimtotik lokal.■

Simulasi Model

Pada subbab ini akan dibahas mengenai simulasi dalam keadaan bebas penyakit dan keadaan terjangkit penyakit untuk memberikan gambaran lebih jelas mengenai model matematika untuk masalah penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan dengan menggunakan parameter-parameter dan nilai awal tertentu.

Jumlah penduduk di Kota Yogyakarta pada tahun 2014 berjumlah 413936 jiwa. Penderita diabetes mellitus tipe II untuk di Kota Yogyakarta berjumlah 2891 jiwa dan 1816 jiwa diantaranya mendapatkan perawatan (Profil Kesehatan Kota Yogyakarta, 2015). Berdasarkan permasalahan nyata yang terjadi di Kota Yogyakarta diperoleh nilai awal untuk $S(0) = 397295$, $E(0) = 13750$, $I(0) = 1075$, dan $I_T(0) = 1816$. Nilai μ menyatakan laju kematian alami individu. Menurut proyeksi penduduk Indonesia tahun 2013, angka harapan hidup di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta adalah 74.3 tahun, sehingga diperoleh $\mu = \frac{1}{74.3} = 0.0135$. Nilai A menyatakan laju rekrutmen dalam populasi. Menurut profil kesehatan Kota Yogyakarta tahun 2015, tingkat kelahiran per 1000 kelahiran adalah 4.386, sehingga diperoleh $A = \frac{413936}{1000}$ x $4.386 = 1815.52 \approx 1816$.

Diasumsikan laju perpindahan individu yang laten menjadi sakit adalah $\frac{1}{20 \text{ tahun}}$, laju kematian karena penyakit diabetes adalah $\frac{1}{60 \text{ tahun}}$, dan laju kematian karena penyakit diabetes adanya pengaruh perawatan adalah $\frac{1}{62 \text{ tahun}}$, maka diperoleh

$$\alpha\gamma = \frac{1}{20} = 0.05$$

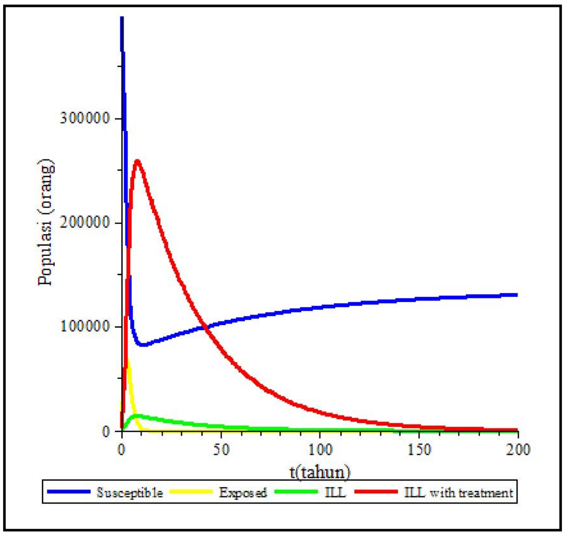
$$\delta_1 = \frac{1}{60} = 0.0167$$

$$\delta_2 = \frac{1}{62} = 0.0161.$$

Parameter β menyatakan laju kontak infektif individu yang rentan menjadi individu yang laten. Nilai parameter ini dapat bervariasi. Diberikan simulasi model yang akan menunjukkan pengaruh dari variasi nilai parameter β terhadap penyebaran penyakit diabetes mellitus. Berikut simulasi untuk $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$.

1. Simulasi untuk $R_0 < 1$

Diambil nilai $\beta = 0.000005$, sehingga mendapatkan nilai $R_0 < 1$.

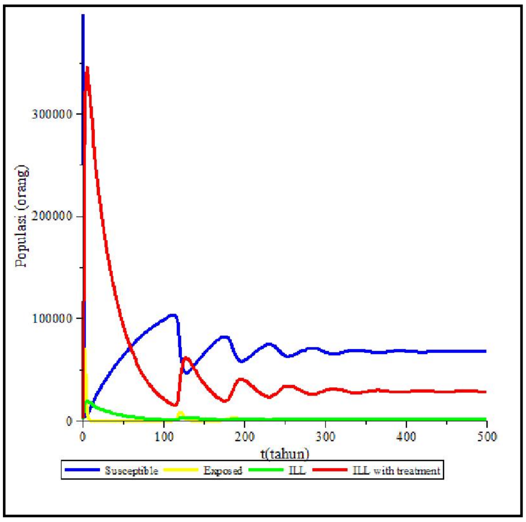


Gambar 2. Grafik Simulasi untuk $R_0 = 0.664$ dengan $\beta = 0.000005$

Pada Gambar 2 terlihat bahwa seiring dengan berjalannya waktu populasi kelas S, populasi kelas E, populasi kelas I, dan populasi kelas I_T menuju titik ekuilibrium bebas penyakit $(S, E, I, I_T) = (134519,0,0,0)$. Ini berarti jumlah individu yang masuk di masing-masing kelas akan berkurang dan bahkan menghilang dari populasi.

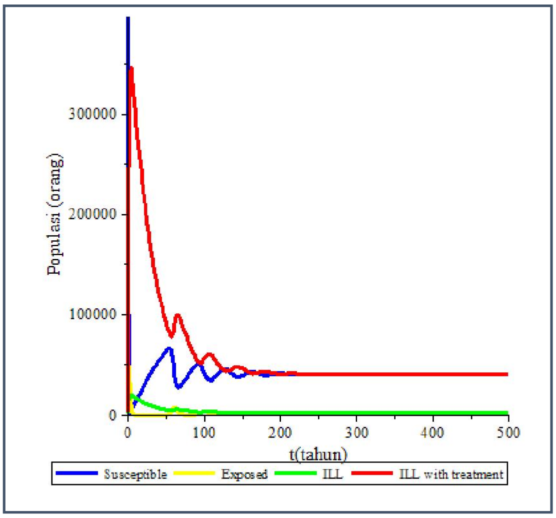
2. Simulasi untuk $R_0 > 1$

Diambil nilai $\beta = 0.000015$, sehingga mendapatkan nilai $R_0 > 1$.



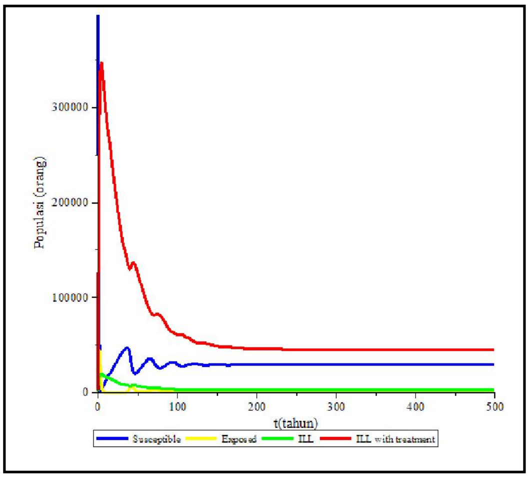
Gambar 3. Grafik Simulasi untuk $R_0 = 1.991$ dengan $\beta = 0.000015$

Selanjutnya diambil nilai $\beta = 0.000025$.



Gambar 4. Grafik Simulasi untuk $R_0 = 3.318$ dengan $\beta = 0.000025$

Selanjutnya diambil nilai $\beta = 0.000035$.

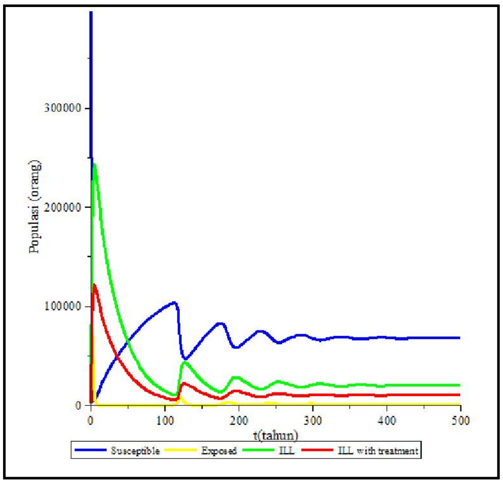


Gambar 5. Grafik Simulasi untuk $R_0 = 4.645$ dengan $\beta = 0.000035$

Berdasarkan Gambar 3, Gambar 4, dan Gambar 5 ditunjukkan bahwa populasi kelas S semakin menurun kemudian meningkat kembali menuju titik ekuilibrium dan populasi kelas I_T dari meningkat kemudian menurun menuju titik ekuilibrium yang artinya jumlah individu yang sakit dengan adanya perawatan akan tetap ada dalam populasi. Populasi kelas E mengalami penurunan tetapi jumlah individu laten akan ada dalam populasi karena terjadi kontak infektif antara populasi S dan E. Populasi kelas I semakin menurun menuju titik ekuilibrium. Berdasarkan hal tersebut menunjukkan bahwa jika parameter yang terbentuk memenuhi $R_0 > 1$, maka penyakit diabetes mellitus akan menjadi endemik.

Berdasarkan deskripsi di atas nilai parameter β yang semakin meningkat menunjukkan bahwa solusi Sistem (3.5) semakin lama akan menuju titik ekuilibrium P_1, dan nilai R_0 semakin besar. Hal ini berarti jika laju kontak infektif individu yang rentan menjadi individu yang laten semakin besar, maka berakibat semakin besar tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus.

Diasumsikan laju perpindahan individu yang laten menjadi sakit tanpa perawatan adalah $\frac{1}{1.5 \text{ tahun}}$, maka diperoleh $\alpha\gamma = \frac{1}{1.5} = 0.67$ dan diambil nilai $\beta = 0.000015$. Berikut simulasi model untuk $R_0 > 1$ yang akan menunjukkan pengaruh dari perubahan nilai parameter $\alpha\gamma$:



Gambar 6. Grafik Simulasi untuk $R_0 = 1.991$ dengan $\beta = 0.000015$ dan $\alpha\gamma = 0.67$

Berdasarkan nilai numerik dan simulasi pada Gambar 3 dan Gambar 6 terlihat bahwa saat laju perpindahan individu laten terhadap individu sakit tanpa perawatan ($\alpha\gamma$) meningkat maka populasi individu rentan dan populasi individu laten tidak ada peningkatan maupun penurunan, sedangkan untuk populasi individu sakit semakin meningkat dan populasi individu sakit dengan adanya perawatan semakin menurun. Perubahan parameter $\alpha\gamma$ yang semakin meningkat menunjukkan bahwa solusi Sistem (3.5) semakin lama akan menuju titik ekuilibrium P_1 dan tidak ada perubahan terhadap nilai R_0 yang artinya tidak berpengaruh terhadap tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan di di atas dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika untuk penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu. Model yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \beta SE$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \mu E - E$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\gamma E - (\mu + \delta_1)I$$

$$\frac{dI_T}{dt} = (1 - \alpha\gamma)E - (\mu + \delta_2)I_T.$$

dengan $N = S + E + I + I_T$.

2. Berdasarkan analisis kestabilan model penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan didapatkan hasil sebagai berikut:

   a. Titik ekuilibrium model penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \widehat{I_T}) = (\frac{A}{\mu}, 0,0,0)$ dan titik ekuilibrium endemik $P_1 = (S^*, E^*, I^*, {I_T}^*)$ yaitu

$$S^* = \frac{\mu + 1}{\beta}$$

$$E^* = \frac{\beta A - \mu(\mu + 1)}{\beta(\mu + 1)}$$

$$I^* = \frac{\alpha\gamma(\beta A - \mu^2 - \mu)}{\beta(\mu^2 + \mu + \mu\delta_1 + \delta_1)}$$

$${I_T}^* = \frac{(1 - \alpha\gamma)(\beta A - \mu^2 - \mu)}{\beta(\mu^2 + \mu + \mu\delta_2 + \delta_2)}$$

   dengan $\beta A > \mu(\mu + 1)$.

   b. Model penyebaran penyakit diabetes mellitus tanpa faktor genetik dengan perawatan memiliki suatu parameter indikator penyebaran penyakit yang disebut bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\mu + 1)}.$$

   c. Pada kondisi $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan penyakit tidak menyerang populasi artinya dalam jangka waktu yang lama populasi penderita diabetes mellitus akan semakin berkurang atau bahkan menghilang. Pada kondisi $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal yang artinya penyakit sangat mungkin untuk menyebar dan untuk jangka waktu tertentu populasi penderita diabetes mellitus akan tetap ada.

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik pada penderita diabetes mellitus di Kota Yogyakarta, terlihat bahwa semakin besar laju kontak infektif individu yang rentan menjadi individu yang laten maka populasi individu laten, populasi individu yang sakit, dan populasi individu yang sakit dengan perawatan semakin meningkat, populasi individu rentan semakin menurun, dan tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus semakin besar. Peningkatan laju perpindahan individu laten terhadap individu sakit tanpa perawatan $(\alpha\gamma)$ mempengaruhi jumlah individu sakit dimana semakin meningkat, jumlah individu sakit dengan adanya perawatan dimana semakin menurun, jumlah individu rentan dan populasi individu laten dimana tidak ada peningkatan

maupun penurunan, dan tidak berpengaruh pada tingkat penyebaran penyakit diabetes mellitus.

Saran

Pada penelitian ini model penyebaran penyakit diabetes mellitus hanya terbatas di wilayah Kota Yogyakarta tahun 2014. Oleh sebab itu, untuk penelitian selanjutnya bisa dilakukan pengambilan data pada wilayah lainnya agar dapat mengetahui penyebaran penyakit diabetes mellitus di wilayah lainnya. Selain itu dapat dibahas pula untuk pengembangan model dengan laju rekrutmen sama dengan laju kematian alami dan analisis kestabilan global model.

DAFTAR PUSTAKA

Badan Pusat Statistik. 2013. *Proyeksi Penduduk Indonesia 2010-2035*. Jakarta: Badan Pusat Statistik.

Boutayeb A, Twizell E H, Achouayb K, & Chetouani A. 2006. A Non-Linear Population Model of Diabetes Mellitus. *J. Appl. Math. & Computing*. 18(1-2):128.

Depkes RI. 2008. *Diabetes Mellitus Ancaman Umat Manusia di Dunia.* Jakarta: Depkes RI.

Dinas Kesehatan. 2015. *Profil Kesehatan Tahun 2015 Kota Yogyakarta.*

Hardiman. 2009. Rapid acting insulin analogue merupakan satu langkah lebih maju dalam terapi DM tipe-2 dalam kondisi gawat darurat maupun untuk regulasi glukosa darah. *Simposium*. Semarang: Badan Penerbit.

Julia Ulfah, M. Kharis, & Moch Chotim. 2014. Model Penyakit untuk Penyakit Diabetes Mellitus tanpa Faktor Genetik dengan Perawatan. *Unnes Journal of Mathematics.* Semarang: UNNES.

Makrogou A, Li J, & Kuang Y. 2006. Mathematical Models and Software Tools for The Glucose-Insulin Regulatory System and Diabetes. *Applied Numerical Mathematics.* 56 :560.

Subroto, M. Ahkam. 2006. *Ramuan Herbal untuk Diabetes Mellitus*. Depok: Penebar Swadaya.

Suyono, S. 2011. *Patofisiologi Diabetes Melitus.* Jakarta: Fakultas Kedokteran Universitas Indonesia.