OPTIMASI TANAMAN PANGAN DI KOTA MAGELANG DENGAN PEMROGRAMAN KUADRATIK DAN METODE FUNGSI PENALTI EKSTERIOR

OPTIMIZATION OF FOOD CROPS IN MAGELANG WITH QUADRATIC PROGRAMMING AND PENALTY METHOD

Oleh: Sativa Nurin Insani[1)], Eminugroho Ratna Sari[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
sativa.insani@gmail.com[1)] , eminugrohosari@ gmail.com [2)]

Abstrak

Optimasi merupakan suatu cara untuk menemukan hasil yang terbaik dari fungsi-fungsi tujuan dengan tetap memperhatikan batasan yang ada. Salah satu contoh penerapannya yaitu optimasi tanaman pangan. Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model matematika untuk mengoptimalkan rata-rata produksi 3 jenis tanaman pangan yaitu padi, ketela pohon dan jagung dengan kendala luas tanaman yang dipanen tidak boleh lebih dari luas tanam maksimal serta menyelesaikan model dengan pemrograman kuadratik dan metode fungsi penalti eksterior. Model matematika dalam penelitian ini merupakan model nonlinear yang dibentuk menggunakan metode kuadrat terkecil. Pemrograman kuadratik menyelesaikan masalah nonlinear dengan mengubahnya menjadi masalah linear menggunakan syarat *Kuhn Tucker* yang kemudian diselesaikan dengan simpleks metode *wolfe*. Sedangkan metode fungsi penalti eksterior mengubah masalah nonlinear berkendala menjadi tak berkendala dan solusi optimalnya memenuhi syarat perlu dan cukup keoptimalan masalah tak berkendala.Diperoleh hasil optimal yang sama dari kedua metode, yaitu 387,0586 kwintal dengan luas panen padi 520,75 hektar, ketela pohon 33,6426 hektar, dan jagung 8,4817 hektar.

Kata kunci: Optimasi, Tanaman Pangan, Metode Kuadrat terkecil, Pemrograman Kuadratik, Metode Fungsi Penalti Eksterior.

Abstract

Optimization is a way to find the best result of objective functions regarding of its constraints. One of the application is the optimization of food crops. The purposes of this research are to formulate mathematics model to optimize the average production of three food crops : rice, cassava, and corn, which harvest area is not more than the maximum acreage and to solve model with quadratic programming and penalty method. The model in this research is a nonlinear model which formed using least square method. Quadratic programming solves the problem by turning the nonlinear model into a linear one using kuhn tucker which later solve with wolfe simplex method. While penalty method changes the constrained nonlinear problem to unconstrained where the optimal solution satisfies the necessary and sufficient optimization of unconstrained problem. The optimum result from the two methods is 387,0586 quintals with 520,75 hectare area of rice harvest, 33,6426 hectare of cassava and 8,4817 hectare of corn.

Keywords: optimization, food crops, least square method, quadratic programming, penalty method.

PENDAHULUAN

Operations Research (Riset Operasi) merupakan suatu bagian dari ilmu pengetahuan yang mulai berkembang pada tahun 1945, yaitu pada saat Perang Dunia II (Siswanto, 2007 : 3). Para ilmuwan serta militer Inggris dan Amerika yang terdiri dari ahli berbagai disiplin ilmu (teknik, matematika, sosiologi, psikologi, dan ahli perilaku atau *behavioral scientist*) merupakan pionir yang memprakarsai penggunaan Riset Operasi sebagai alat bantu dalam proses pengambilan keputusan (Suyadi, 2005 : 3).

Model-model Riset Operasi adalah teknik-teknik optimasi, yaitu suatu teknik penyelesaian terhadap sebuah persoalan matematis yang akan menghasilkan sebuah jawaban optimal (Siswanto, 2007 : 12). Terdapat dua jenis kasus optimasi, yaitu optimasi tanpa kendala dan optimasi dengan kendala (Winston, 2003 : 2). Sedangkan model dalam optimasi dibagi menjadi dua, yaitu model linear dan nonlinear. Model nonlinear dinyatakan dengan bentuk variabel keputusan pada fungsi tujuannya merupakan kuadrat dari variabel keputusan atau perkalian dari dua variabel keputusan (Hillier & Lieberman, 2001 : 665). Model nonlinear tidak hanya dapat terjadi pada bidang bisnis dan portofolio saja, akan tetapi juga dapat terjadi pada bidang pertanian, misalnya untuk optimasi produksi tanaman pangan.

Menurut BPS Provinsi Jawa Tengah (2013) tantangan dalam sektor pertanian yaitu meningkatnya permintaan terhadap kebutuhan bahan pangan yang merupakan dampak dari pertumbuhan penduduk yang relatif tinggi setiap tahunnya. Kebutuhan bahan pangan masyarakat Indonesia sebagian besar bertumpu pada komoditas beras, dan sebagian kecil mengkonsumsi palawija seperti jagung dan ubi.

Di kota Magelang jenis tanaman pangan yang diproduksi setiap tahunnya selalu berubah-ubah. Berdasarkan data dari buku Magelang Dalam Angka, dari tahun 1994 hingga tahun 2014 produksi tanaman pangan di kota Magelang mengalami penurunan, maka perlu dianalisis optimasi tanaman pangan di kota Magelang agar dapat digunakan untuk mengetahui apakah produksi dari masing – masing tanaman telah mencapai nilai optimal atau belum. Jika belum itu artinya pemerintah perlu meningkatkan produksi tanaman tersebut. Berdasarkan data dari buku Kota Magelang Dalam Angka, padi, ketela pohon, dan jagung adalah tanaman yang paling banyak diproduksi dari tahun 1994 hingga tahun 2014. Oleh karena itu dipilihlah ketiga tanaman tersebut.

Teknik optimasi masalah nonlinear berkendala dibagi menjadi dua kategori, yaitu metode langsung (*direct method*) dan metode tidak langsung (*indirect method*). Salah satu yang termasuk metode langsung yaitu metode Pemrograman Kuadratik. Sedangkan metode tidak langsung salah satunya yakni metode Fungsi Penalti Eksterior (metode *Penalty*) (Rao, 2009 : 381).

Pemrograman kuadratik merupakan pendekatan penyelesaian permasalahan optimasi nonlinear dengan kendalanya berupa fungsi linear dan fungsi tujuannya merupakan fungsi non linear. (Hillier & Lieberman, 2001 : 665). Beberapa penelitian mengenai pemrograman kuadratik pernah dilakukan oleh Vina (2013) yang memperoleh hasil yaitu periode tanam padi yang optimal adalah periode III (September-Desember). Selain itu, ada pula Efria (2015) yang mengaplikasikan pemrograman kuadratik pada portofolio saham memperoleh model nonlinear pada portofolio saham perbankan beserta persentase proporsi dana yang diinvestasikan.di masing-masing bank.

Metode fungsi penalti eksterior (metode *penalty*) adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi nonlinear berkendala menjadi masalah tidak berkendala dengan menambahkan fungsi penalti dan parameter penalti pada fungsi tujuannya (Rao, 2009 : 443).

Penelitian mengenai metode fungsi penalti pernah dilakukan oleh Maria (2008) yang pada penelitiannya menemukan dua kasus dalam penyelesaian masalah optimasi nonlinear berkendala dengan metode fungsi penalti eksterior yaitu kasus umum yang memerlukan titik awal dan kasus khusus yang tidak memerlukan titik awal. Selain itu, ada pula Tri Wahyu (2006) yang memperoleh hasil bahwa barisan minimisasi pada metode *penalty* adalah barisan naik yang konvergen ke solusi optimal masalah berkendala dan barisan minimisasi pada metode *barrier* adalah barisan turun yang konvergen ke solusi optimal masalah berkendala.

Pemrograman kuadratik dipilih karena setelah diubah ke bentuk linear, dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Sedangkan metode fungsi penalti eksterior dipilih karena metode ini dapat menyelesaikan masalah dengan kendala secara lebih umum. Berdasarkan latar belakang tersebut, tugas akhir ini akan melakukan penelitian tentang optimasi tanaman pangan di kota Magelang dengan pendekatan Pemrograman Kuadratik dan Metode Fungsi Penalti Eksterior.

Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model matematika untuk pengoptimalan rata-rata produksi tanaman pangan di kota Magelang dan penyelesaian model menggunakan pemrograman kuadratik dan metode fungsi penalti eksterior. Adapun manfaat dari penelitian ini adalah memberikan luas panen yang optimal untuk tanaman pangan di kota Magelang agar dapat dijadikan acuan untuk meningkatkan produksi tanaman pangan di Kota Magelang, dan untuk dijadikan bahan referensi dalam kajian optimasi pemrograman non linear selanjutnya.

KAJIAN PUSTAKA

Berikut ini akan dijelaskan teori tentang perograman nonlinear, pemrograman kuadratik dan metode fungsi penalti eksterior.

Pemrograman Nonlinear

Bentuk umum masalah pemrograman nonlinear adalah menemukan nilai dari variabel keputusan $x_1, x_2, \dots, x_n$ agar

Memaksimumkan /meminimumkan

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)&(\leq, =, \text{atau } \geq)\, b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)&(\leq, =, \text{atau } \geq)\, b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)&(\leq, =, \text{atau } \geq)\, b_m \end{aligned} \quad \textbf{(1)}$$

Dengan f fungsi non linear dan g fungsi linear atau non linear. (Winston, 2003 : 619)

Menurut Hillier (2001 : 664) terdapat 3 bentuk permasalahan pemrograman nonlinear, yaitu :

1. **Pemrograman Nonlinear Tanpa Kendala**

Pemrograman nonlinear tanpa kendala merupakan optimasi yang tidak memiliki kendala dengan fungsi tujuan berbentuk nonlinear. Bentuk model pemrograman nonlinear tanpa kendala untuk menentukan nilai $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan

Fungsi tujuan : maksimum / minimum $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear tanpa kendala terdapat dua syarat keoptimalan, yaitu :

a. Syarat Perlu Keoptimalan

Syarat perlu keoptimalan digunakan untuk mencari titik-titik optimal x^* pada pendekatan analitis. Syarat perlu keoptimalan mengatakan bahwa :

Jika solusi $x = x^*$ adalah titik optimal dari $f(x)$ maka :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{di } x = x^* \text{ untuk } j = 1,2, \dots n \qquad \textbf{(2)}$$

b. Syarat Cukup Keoptimalan

Syarat cukup keoptimalan digunakan untuk menentukan apakah titik optimal yang didapatkan dari syarat perlu keoptimalan merupakan titik minimum atau titik maksimum.

Syarat cukup keoptimalan yaitu :

Jika $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ dan $\mathrm{H}(x^*)$ definit positif maka x^* titik minimum

Jika $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ dan $\mathrm{H}(x^*)$ definit negatif maka x^* titik maksimum

2. Pemrograman Nonlinear Dengan Kendala Linear

Pemrograman nonlinear dengan kendala linear merupakan optimasi dengan kendala berbentuk fungsi linear dan fungsi tujuan berupa fungsi nonlinear. Untuk menentukan nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan bentuk umum adalah :

Maksimum/minimum : $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

dengan kendala : $g_m(x)(\leq, =, \geq)0$

Untuk $m = 1,2, \dots, n$.

3. Pemrograman Nonlinear Dengan Kendala Nonlinear

Menurut Taha (2007 : 699) pemrograman nonlinear dengan kendala non linear merupakan masalah optimasi dengan fungsi tujuan nonlinear dan fungsi kendala nonlinear. Pemrograman nonlinear berkendala nonlinear dibedakan menjadi dua yaitu :

a. Untuk $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bentuk umum pemrograman nonlinear dengan kendala kesamaan (*equality*) adalah

Fungsi tujuan :

Maksimum/minimum : $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Fungsi kendala : $g_m(x) = 0$

Dimana m menunjukkan jumlah kendala dan n menunjukkan jumlah variabel dengan $m \leq n$.

b. Bentuk umum pemrograman nonlinear dengan kendala pertidaksamaan adalah

Maksimum/minimum : $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dengan kendala :

$g_m(x)(\leq, \geq)0$ Untuk $m = 1,2, \dots, n$

$x \geq 0$

Pemrograman Kuadratik

Pemrograman kuadratik merupakan pendekatan penyelesaian permasalahan optimasi nonlinear dengan kendalanya berupa fungsi linear dan fungsi tujuannya berupa fungsi nonlinear. Bentuk umum dari masalah pemrograman kuadratik menurut Peressini, dkk (1988) adalah

Meminimalkan $f(X) = CX + \frac{1}{2}XQX + d$ **(2)**

dengan kendala

$$AX \leq B \qquad \textbf{(3a)}$$

$$X \geq 0 \qquad \textbf{(3b)}$$

Permasalahan pada pemrograman kuadratik diubah menjadi bentuk linear melalui syarat Karush Kuhn Tucker.

Teorema 1. Syarat KKT masalah maksimisasi

(Winston, 2003 :676)

Andaikan $f(x)$ *dan* $g_i(x)$ *adalah masalah maksimisasi. Jika* $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *merupakan solusi optimal untuk* $f(x)$ *dan* $g_i(x)$, *maka* $x^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *harus memenuh (1) dengan kendala berbentuk* $g_i(x) \leq b_i$ *dan harus ada pengali* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ *serta variabel slack* $s_1, s_2, \dots, s_n$ *yang memenuhi :*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} + s_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$\lambda_i[b_i - g_i(x)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$

$$\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\right] x^*{}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$

$s_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$

Metode Fungsi Penalti Ekterior

Metode fungsi penalti adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi nonlinear berkendala menjadi masalah tidak berkendala dengan menambahkan fungsi penalti dan parameter penalti pada fungsi tujuannya. Fungsi Penalti terjadi karena adanya pelanggaran terhadap fungsi tujuan, yaitu menghilangkan kendala pada permasalahan (Bazaraa, 2006 : 470). Fungsi Penalti Eksterior merupakan bentuk fungsi tambahan yakni, fungsi tujuan ditambahkan fungsi penalti. Jika $\alpha(x)$ merupakan fungsi penalti, yaitu

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} [maks\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=1}^{l} |h_i(x)|^p$$

Fungsi $f(x)$ merupakan fungsi tujuan, maka diperoleh bentuk umum masalah Fungsi Penalti Eksterior adalah :

Meminimalkan

$$z = f(x) + \mu_k \sum_{i=1}^{m} [maks\{0, g_i(x)\}]^p + \mu_k \sum_{i=1}^{l} |h_i(x)|^p \qquad \textbf{(4)}$$

(Bazaraa, 2006 : 471)

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berikut ini akan dipaparkan langkah penyelesaian model dengan pemrograman kuadratik dan metode fungsi penalti eksterior.

Penyelesaian dengan Pemrograman Kuadratik Metode *Wolfe*

Langkah-langkah penyelesaian dengan pemrograman kuadratik metode *wolfe* adalah sebagai berikut (Yuni, 2015)

a. Membentuk kondisi *Kuhn Tucker*
b. Mengidentifikasi *complementary slackness* sesuai Sifat 2.1 berikut

   Sifat 2.1 *Complementary Slackness* pada *Pemrograman kuadratik* (Winston, 2003 : 687)

   1) e_j dan s_j pada kondisi Kuhn Tucker dan x_j tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.
   2) Variabel surplus (excess) ataupun slack untuk kendala ke-i dan λ_i tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.
c. Menambahkan variabel buatan a_i untuk setiap kondisi *Kuhn Tucker* yang tidak memiliki variabel basis.
d. Membuat fungsi tujuan baru yang linear yaitu fungsi tujuan untuk meminimalkan jumlah nilai variabel buatan a_i.
e. Melakukan proses iterasi simpleks dengan menggunakan metode *wolfe*.

   Untuk menjamin bahwa solusi akhir (variabel buatan a_i bernilai nol) memenuhi kondisi *complementary slackness*, metode *wolfe* memiliki modifikasi untuk pilihan variabel simpleks yang masuk menjadi basis, yaitu

1) s_i dari kondisi *Kuhn Tucker* dan variabel keputusan x_i tidak bisa menjadi variabel basis secara bersamaan.
2) Variabel *surplus* e_i atau variabel *slack* s_i dari kendala ke-i dan λ_i dari kondisi *Kuhn Tucker* tidak boleh kedua-duanya menjadi variabel basis.

   Syarat basis diatas bersesuaian dengan *complementary slackness* dari pemrograman kuadratik. Jadi, apabila simpleks dikerjakan dengan cara biasa tanpa menggunakan syarat basis diatas maka pada hasil tabel optimal akan ada *complementary slackness* yang tidak terpenuhi.

f. Mensubstitusikan hasil dari tabel optimum ke dalam fungsi tujuan awal (nonlinear) untuk didapatkan solusi optimum.

   Jika dalam tabel optimum terdapat variabel buatan a_i maka dapat disubstitusikan ke fungsi tujuan linear. Begitu pula untuk variabel *slack*, *surplus,* buatan ataupun λ maka dapat disubstitusikan ke bentuk kanonik yang telah dibentuk di awal.

Penyelesaian dengan Metode Fungsi Penalti Eksterior

Langkah-langkah penyelesaian dengan metode fungsi penalti eksterior adalah

a. Mengecek kekontinuan fungsi tujuan dan fungsi kendala
b. Membentuk fungsi tujuan untuk masalah optimasi tidak berkendala $z = f(x) + \mu_k \alpha(x)$, dengan

1) $f(x)$ adalah fungsi tujuan masalah berkendala
2) μ_k adalah parameter penalti
3) Fungsi penalti

   $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m}[maks\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=1}^{l}|h_i(x)|^p$
4) $g_i(x)$ adalah fungsi kendala pertidaksamaan
5) $h_i(x)$ adalah fungsi kendala persamaan
6) p adalah bilangan bulat positif

c. Menentukan penyelesaian dari masalah minimalkan z, yakni x^*. Menurut syarat perlu keoptimalan masalah nonlinear tanpa kendala, titik optimal akan dicapai ketika turunannya sama dengan nol.
d. Menyelidiki apakah nilai optimal yang dicapai merupakan titik minimum atau maksimum berdasarkan syarat cukup keoptimalan masalah nonlinear tanpa kendala.

Penerapan Model Nonlinear pada Rata-Rata Produksi Tanaman Pangan di Kota Magelang

Hal pertama yang dilakukan adalah membentuk model matematika untuk optimasi rata-rata produksi tanaman pangan di kota Magelang.

Pembentukan Model

Data yang digunakan adalah data yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) kota Magelang. Data yang dianalisis adalah data luas tanam, luas panen dan rata-rata produksi padi, ketela pohon dan jagung pada tahun 1994-2014.

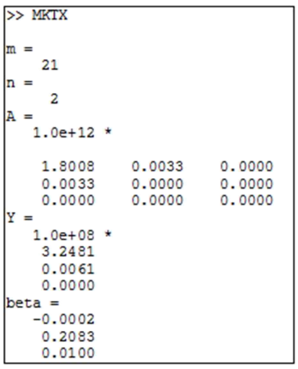
Tabel 1. Data Luas Tanam, Luas Panen, dan Rata-rata Produksi Padi, Ketela Pohon dan Jagung tahun 1994-2014

Th	Padi Sawah			Ketela Pohon			Jagung		
	LT (Ha)	LP (Ha)	RRP (kw)	LT (Ha)	LP (Ha)	RRP (kw)	LT (Ha)	LP (Ha)	RRP (kw)
1994	546	602	50,83	59	59	125,76	9	10	32
1995	626	600	51,68	12	16	121,88	6	11	20
1996	637	618	52,04	16	19	132,11	7	7	27,14
1997	604	621	51,8	2	7	132,86	18	14	22,86
1998	648	591	51,82	11	9	153,3	11	15	26,66
1999	600	569	52,81	21	17	172,47	5	7	25
2000	489	497	53,51	1	2	90	3	5	25
2001	525	474	53,35	7	7	168,57	3	4	25,05

2002	517	514	52,79	11	15	139,33	3	-	-
2003	492	469	52,81	7	8	139,38	-	1	20
2004	490	471	52,4	5	7	140	-	-	-
2005	480	473	52,64	8	8	140	-	1	25
2006	495	491	52,62	5	6	140	-	-	-
2007	502	501	54,51	4	3	140	1	-	-
2008	503	504	54,56	7	3	140	3	4	25
2009	513	512	54,67	9	10	140	3	2	63,5
2010	519	520	54,75	10	11	141	2	2	64
2011	550	551	56,98	7	9	70	2	3	16,25
2012	541	548	59,708	4	3	148,96	-	-	-
2013	544	548	58,5	1	3	73,33	-	-	-
2014	552	547	58,18	24	2	70	-	-	-

Berdasarkan data dari Tabel 1, akan dibentuk fungsi tujuan menggunakan metode kuadrat terkecil yang perhitungannya menggunakan *software* Matlab. Adapun langkah-langkah nya adalah sebagai berikut.

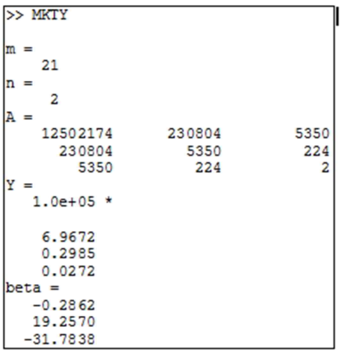
a) Masukkan data luas panen dan rata-rata produksi padi ke *software* Matlab.
b) Ketikkan pada script-file pemrograman untuk mendapatkan parameter fungsi tujuan,
c) Panggil Script pada command window
d) Muncul hasil pada command window seperti berikut



```
>> MKTX
m =
   21
n =
    2
A =
   1.0e+12 *

    1.8008    0.0033    0.0000
    0.0033    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000
Y =
   1.0e+08 *
    3.2481
    0.0061
    0.0000
beta =
   -0.0002
    0.2083
    0.0100
```

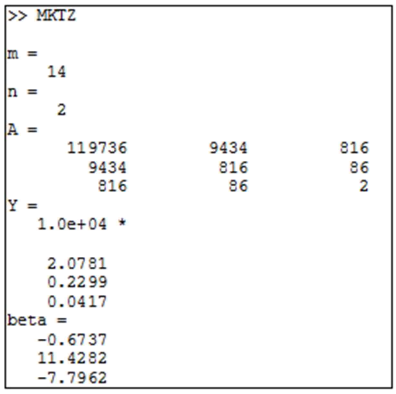
Gambar 1. Tampilan Output untuk Padi



```
>> MKTY
m =
    21
n =
     2
A =
    12502174        230804          5350
      230804          5350           224
        5350           224             2
Y =
   1.0e+05 *

    6.9672
    0.2985
    0.0272
beta =
   -0.2862
   19.2570
  -31.7838
```

Gambar 2. Tampilan Output untuk Ketela Pohon



```
>> MKTZ
m =
    14
n =
     2
A =
      119736          9434           816
        9434           816            86
         816            86             2
Y =
   1.0e+04 *

    2.0781
    0.2299
    0.0417
beta =
   -0.6737
   11.4282
   -7.7962
```

Gambar 3. Tampilan Output untuk Jagung

Menurut hasil dari Gambar 1-3, diperoleh fungsi tujuan pada masalah ini adalah mengoptimalkan rata-rata produksi tanaman pangan yang terbentuk dari jumlahan rata-rata produksi padi, ketela pohon, dan jagung, sehingga fungsi tujuan bersama yaitu memaksimumkan

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

$\Leftrightarrow f(x) = [-0{,}0002x_1^{\,2} + 0{,}2083x_1 + 0{,}01] + [-0{,}2862x_2^{\,2} + 19{,}2570x_2 - 31{,}7838] + [-0{,}6737x_3^{\,2} + 11{,}4282x_3 - 7{,}7962]$

$$\Leftrightarrow f(x) = -0{,}0002x_1^{\,2} - 0{,}2862x_2^{\,2} - 0{,}6737x_3^{\,2} + 0{,}2083x_1 + 19{,}2570x_2 + 11{,}4282x_3 - 39{,}57 \quad \textbf{(5)}$$

Selanjutnya akan diselidiki terlebih dahulu apakah Persamaan (5) valid atau tidak yaitu dengan melihat error dan *conditional number*-nya. Diperoleh error Persamaan (5) sebesar 35% dan *conditional number*-nya 783,8552. Jika nilai *conditional number* < 67108864 , maka nilai koefisien beta pada fungsi tujuan yang dicari menggunakan metode kuadrat terkecil dinyatakan terbaik (Anderson dalam Vina, 2013). Oleh karena 783,8552 < 67108864, maka Persamaan (5) merupakan fungsi pendekatan yang terbaik.

Pada permasalahan ini kendalanya yaitu luas panen tidak boleh lebih dari luas tanam maksimum. Sehingga menurut data pada Tabel 1, fungsi kendala pada masalah ini adalah

$$g_1(x) = x_1 \leq 648 \quad \textbf{(6a)}$$

$$g_2(x) = x_2 \leq 59 \quad \textbf{(6b)}$$

$$g_3(x) = x_3 \leq 18 \qquad \textbf{(6c)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad \textbf{(6d)}$$

Penyelesaian Model dengan Pemrograman Kuadratik Metode *Wolfe*

Persamaan (5) dan (6) sudah sesuai dengan bentuk umum masalah pemrograman kuadratik dengan Persaman (5) merupakan fungsi konkaf dan Persamaan (6) merupakan fungsi konveks sehingga KKT dapat dijadikan syarat perlu dan cukup keoptimalan (Hillier, 2001 : 679). Oleh karena itu Persamaan (5) dan (6) dapat diselesaikan dengan pemrograman kuadratik metode *wolfe.*

Adapun langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut

a. Membentuk Kondisi *Kuhn-Tucker*

Berdasarkan Teorema 1, maka pada Persamaan (3.15) dapat ditentukan syarat *Kuhn-Tucker*nya yaitu

1) $-0{,}0004x_1 + 0{,}2083 - \lambda_1 + s_1 = 0$ **(7a)**

$-0{,}5724x_2 + 19{,}257 - \lambda_2 + s_2 = 0$ **(7b)**

$-1{,}3474x_3 + 11{,}4282 - \lambda_3 + s_3 = 0$ **(7c)**

2) $\lambda_1[648 - x_1] = 0$ **(8a)**

$\lambda_2[59 - x_2] = 0$ **(8b)**

$\lambda_3[18 - x_3] = 0$ **(8c)**

3) $(-0{,}0004x_1 + 0{,}2083 - \lambda_1)x_1 = 0$ **(9a)**

$(-0{,}5724x_2 + 19{,}257 - \lambda_2)x_2 = 0$ **(9b)**

$(-1{,}3474x_3 + 11{,}4282 - \lambda_3)x_3 = 0$ **(9c)**

4) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ **(10)**

5) $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ **(11)**

Berdasarkan Persamaan (6a), (6b), dan (6c) maka diperoleh

$x_1 - 648 \leq 0$ **(12a)**

$x_2 - 59 \leq 0$ **(12b)**

$x_3 - 18 \leq 0$ **(12c)**

Bentuk Persamaan (12) dapat dijadikan bentuk kanonik sehingga menjadi

$x_1 + s_1' = 648$ **(13a)**

$x_2 + s_2' = 59$ **(13b)**

$x_3 + s_3' = 18$ **(13c)**

Setelah mengidentifikasi syarat Kuhn Tucker, maka kondisi Kuhn Tucker untuk Persamaan (6) yaitu

$-0{,}0004x_1 + 0{,}2083 - \lambda_1 + s_1 = 0$ **(7a)**

$-0{,}5724x_2 + 19{,}257 - \lambda_2 + s_2 = 0$ **(7b)**

$-1{,}3474x_3 + 11{,}4282 - \lambda_3 + s_3 = 0$ **(7c)**

$x_1 + s_1' = 648$ **(13a)**

$x_2 + s_2' = 59$ **(13b)**

$x_3 + s_3' = 18$ **(13c)**

b. Mengidentifikasi *complementary slackness*

Berdasarkan Persamaan (8) dan (13), Persamaan (7) dan (9) dan sifat *complementary slackness* pada pemrograman kuadratik, maka kondisi *complementary slackness* untuk Persamaan (5) adalah

$\lambda_1 s_1' = 0$ $\qquad s_1 x_1 = 0$

$\lambda_2 s_2' = 0$ $\qquad s_2 x_2 = 0$

$\lambda_3 s_3' = 0$ $\qquad s_3 x_3 = 0$

c. Menambah variabel buatan a_i untuk setiap kondisi Kuhn-Tucker yang tidak memiliki variabel basis

Persamaan (7) tidak memiliki variabel basis sehingga ditambahkan variabel buatan a_i sehingga bentuknya menjadi

$0{,}0004x_1 + \lambda_1 - s_1 + a_1 = 0{,}2083$ **(14a)**

$0{,}5724x_2 + \lambda_2 - s_2 + a_2 = 19{,}257$ **(14b)**

$1{,}3474x_3 + \lambda_3 - s_3 + a_3 = 11{,}4282$ **(14c)**

d. Menentukan fungsi tujuan baru yang linear

Bentuk fungsi tujuan baru yang linear untuk masalah rata-rata produksi padi, ketela pohon, dan jagung adalah

Meminimumkan

$$w = a_1 + a_2 + a_3 \qquad \textbf{(15)}$$

dengan kendala

$$0{,}0004x_1 + \lambda_1 - s_1 + a_1 = 0{,}2083 \qquad \textbf{(14a)}$$

$$0{,}5724x_2 + \lambda_2 - s_2 + a_2 = 19{,}257 \qquad \textbf{(14b)}$$

$$1{,}3474x_3 + \lambda_3 - s_3 + a_3 = 11{,}4282 \qquad \textbf{(14c)}$$

$$x_1 + s_1{}' = 648 \qquad \textbf{(13a)}$$

$$x_2 + s_2{}' = 59 \qquad \textbf{(13b)}$$

$$x_3 + s_3{}' = 18 \qquad \textbf{(13c)}$$

Semua variabel non negatif

e. Melakukan proses iterasi simpleks dengan metode wolfe

Setelah didapatkan fungsi tujuan dan kendala baru, yaitu Persamaan (13) – (15) dibuatlah tabel simpleks lalu dilakukan perhitungannya. Perhitungan iterasi simplek menggunakan bantuan *excel*, berikut adalah tampilan tabel optimum.

	C_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0		
c_i	x_i/X_j	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2	μ_3	a_1	a_2	a_3	s_1'	s_2'	s_3'	b_i	R_i
0	x_1	1	0	0	2500	0	0	-2500	0	0	2500	0	0	0	0	0	520,75	
0	x_2	0	1	0	0	1,747	0	0	-1,747	0	0	1,747	0	0	0	0	33,6426	
0	x_3	0	0	1	0	0	0,742	0	0	-0,742	0	0	0,742	0	0	0	8,4817	
0	s_1'	0	0	0	-2500	0	0	2500	0	0	-2500	0	0	1	0	0	127,25	
0	s_2'	0	0	0	0	-1,747	0	0	1,747	0	0	-1,747	0	0	1	0	25,3574	
0	s_3'	0	0	0	0	0	-0,74	0	0	0,742	0	0	-0,742	0	0	1	9,5183	
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0		

Gambar 4. Tampilan tabel optimum simplek metode *wolfe*

Berdasarkan Gambar 4 diperoleh hasil $x_1 = 520{,}75$, $x_2 = 33{,}6426$, $x_3 = 8{,}4817$, $s_1{}' = 127{,}25$, $s_2{}' = 25{,}3574$, dan $s_3{}' = 9{,}5183$. Kemudian untuk mendapatkan nilai maksimum yang dicari maka nilai variabel x_1, x_2 dan x_3 disubstitusikan ke Persamaan (5) yang merupakan fungsi tujuan awal yaitu

$$f(x) = -0{,}0002(520{,}75)^2 - 0{,}2862(33{,}6426)^2 - 0{,}6737(8{,}4817)^2 + 0{,}2083(520{,}75) + 19{,}2570(33{,}6426) + 11{,}4282(8{,}4817) - 39{,}57 = 387{,}0586$$

Penyelesaian dengan Metode Fungsi Penalti Eksterior

Persamaan (5) merupakan masalah nonlinear dengan kendala Persamaan (6). Oleh karena itu, Persamaan (5) dan (6) dapat diselesaikan dengan metode *penalty.* Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut

a. Mengecek kekontinuan fungsi tujuan dan fungsi kendala

Akan dibuktikan terlebih dahulu f, g_1, g_2, g_3 adalah fungsi yang kontinu. Suatu fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim_{x \to c} f(x) = L = f(c)$ yang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Atau dengan kata lain fungsi tersebut memiliki turunan. Berikut ini akan dicari turunan pertama dari fungsi f, g_1, g_2, g_3.

$$f' = \begin{pmatrix} -0{,}0004x_1 + 0{,}2083 \\ -0{,}5724x_2 + 19{,}257 \\ -1{,}3474x_3 + 11{,}4282 \end{pmatrix}, g_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Karena f', $g_1{}'$, $g_2{}'$, $g_3{}'$ ada, maka f, g_1, g_2, g_3 adalah fungsi yang kontinu.

b. Membentuk fungsi tujuan untuk masalah optimasi tidak berkendala sesuai bentuk umum masalah fungsi penalti pada Persamaan (4).

Masalah optimisasi Persamaan (5) dan (6), diubah ke dalam masalah optimisasi tanpa kendala menggunakan metode *penalty* dengan membentuk fungsi z dan memilih $p = 2$ (karena 2 merupakan bilangan positif terkecil yang mengakibatkan fungsi penalti $\alpha(x)$ tetap termuat dalam fungsi tujuan baru z setelah diturunkan), sehingga menjadi

$$z = f(x) + \mu_k \alpha(x)$$

$$z = f(x) + \mu_k \sum_{i=1}^{m} [maks\{0, g_i(x)]^2$$

Maka diperoleh masalah fungsi penalti eksterior yaitu

Meminimumkan

$$z = -0{,}0002{x_1}^2 - 0{,}2862{x_2}^2 - 0{,}6737{x_3}^2 + 0{,}2083x_1 + 19{,}2570x_2 + 11{,}4282x_3 - 39{,}57 \ + \mu_k([maks\{0, x_1 - 648\}]^2 + [maks\{0, x_2 - 59\}]^2 + [maks\{0, x_3 - 18\}]^2) \quad \textbf{(16)}$$

c. Menentukan penyelesaian dari masalah meminimalkan z, yakni x^*.

Titik optimal akan dicapai jika $z' = 0$, maka

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -0{,}0004x_1 + 0{,}2083 + 2\mu_k[maks\{0, x_1 - 648\}] = 0 \quad \textbf{(17a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -0{,}5724x_2 + 19{,}257 + 2\mu_k[maks\{0, x_2 - 59\}] = 0 \quad \textbf{(17b)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = -1{,}3474x_3 + 11{,}4282 + 2\mu_k[maks\{0, x_3 - 18\}] = 0 \quad \textbf{(17c)}$$

Karena tujuan masalah fungsi penalti adalah meminimalkan maka Persamaan (17) dapat ditulis

$$\min[-0{,}0004x_1 + 0{,}2083, -0{,}0004x_1 + 0{,}2083 + 2\mu_k(x_1 - 648)] = 0 \quad \textbf{(18a)}$$

$$\min[-0{,}5724x_2 + 19{,}257, -0{,}5724x_2 + 19{,}257 + 2\mu_k(x_2 - 59)] = 0 \quad \textbf{(18b)}$$

$$\min[-1{,}3474x_3 + 11{,}4282, -1{,}3474x_3 + 11{,}4282 + 2\mu_k(x_3 - 18)] = 0 \quad \textbf{(18c)}$$

Dari Persamaan (18) diperoleh

$$x_1 = \frac{0{,}2083}{0{,}0004} = 520{,}75$$

$$x_2 = \frac{19{,}257}{0{,}5724} = 33{,}6426$$

$$x_3 = \frac{11{,}4282}{1{,}3474} = 8{,}4817$$

d. Menyelidiki apakah nilai x_1, x_2, dan x_3 merupakan nilai minimum atau maksimum berdasarkan syarat cukup keoptimalan masalah nonlinear tanpa kendala.

Matriks Hessian dari Persamaan (16) adalah sebagai berikut

$$H(x) = \begin{bmatrix} -0{,}0004 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5724 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}3474 \end{bmatrix}$$

Akan diselidiki apakah $H(x)$ definit positif, negatif, atau tidak definit.

Jika $H(x)$ dinyatakan dalam bentuk kuadratik, maka

$x^t H(x) x$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} -0{,}0004 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5724 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}3474 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [-0{,}0004x_1 \quad -0{,}5724x_2 \quad -1{,}3474x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= -0{,}0004x_1^2 - 0{,}5724x_2^2 - 1{,}3474x_3^2 < 0$$

Karena matriks $H(x)$ negatif maka matriks $H(x)$ definit negatif. Menurut syarat cukup keoptimalan masalah nonlinear tanpa kendala jika $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dan $H(x)$ definit negatif, maka x merupakan titik maksimum. Jadi nilai maksimum dari

$f(x) = -0{,}0002{x_1}^2 - 0{,}2862{x_2}^2 - 0{,}6737{x_3}^2 + 0{,}2083x_1 + 19{,}2570x_2 + 11{,}4282x_3 - 39{,}57$,

untuk

$(x_1, x_2, x_3) = (520{,}75;\ 33{,}6426;\ 8{,}4817)$

adalah

$f(x) = -0{,}0002(520{,}75)^2 - 0{,}2862(33{,}6426)^2 - 0{,}6737(8{,}4817)^2 + 0{,}2083(520{,}75) + 19{,}2570(33{,}6426) + 11{,}4282(8{,}4817) - 39{,}57 = 387{,}0586$.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

1. Model matematika untuk pengoptimalan rata-rata produksi tanaman pangan di kota Magelang, yaitu memaksimumkan fungsi tujuan :

   $f(x) = -0{,}0002{x_1}^2 - 0{,}2862{x_2}^2 - 0{,}6737{x_3}^2 + 0{,}2083x_1 + 19{,}2570x_2 + 11{,}4282x_3 - 39{,}57$

   dengan kendala

   $x_1 \leq 648$

   $x_2 \leq 59$

   $x_3 \leq 18$

   $x_1, x_2, x_3 \ \geq 0$

2. Setelah masalah pemrograman kuadratik teridentifikasi, maka langkah penyelesaian Model (5) - (6) dengan pemrograman kuadratik adalah

a. Membentuk Kondisi *Kuhn-Tucker* untuk fungsi nonlinear $f(x_1, x_2, x_3)$ yang terbentuk.

b. Mengidentifikasi *complementary slackness*

c. Menambah variabel buatan a_i untuk setiap kondisi *Kuhn-Tucker* yang tidak memiliki variabel basis

d. Menentukan fungsi tujuan baru yang linear, yaitu meminimumkan $w = a_1 + a_2 + a_3$

e. Melakukan proses iterasi simpleks dengan metode *wolfe*

f. Mensubstitusikan hasil dari tabel optimum ke dalam fungsi tujuan nonlinear untuk mendapatkan solusi optimal.

Berdasarkan hasil perhitungan simpleks yang telah dilakukan, diperoleh rata-rata produksi tanaman pangan total dari padi, ketela pohon dan jagung, yaitu 387,0586 kwintal dengan luas panen padi (x_1) 520,75 hektar, luas panen ketela pohon (x_2) 33,6426 hektar, dan luas panen jagung (x_3) 8,4817 hektar.

3. Setelah masalah metode fungsi penalti eksterior (metode *penalty*) teridentifikasi, maka langkah penyelesaian Model (5) – (6) dengan metode *penalty* adalah

a. Mengecek kekontinuan fungsi tujuan nonlinear $f(x_1, x_2, x_3)$ dan fungsi kendala $g_1(x), g_2(x)$, dan $g_3(x)$.

b. Membentuk fungsi tujuan untuk masalah optimasi tidak berkendala, yaitu

   $z = -0{,}0002{x_1}^2 - 0{,}2862{x_2}^2 - 0{,}6737{x_3}^2 + 0{,}2083x_1 + 19{,}2570x_2 + 11{,}4282x_3 - 39{,}57 \ + \mu_k([maks\{0, x_1 - 648\}]^2 + [maks\{0, x_2 - 59\}]^2 + [maks\{0, x_3 - 18\}]^2)$.

c. Menentukan penyelesaian dari masalah minimalkan z, yakni x^*, dengan syarat titik optimal akan dicapai jika $\mathrm{z}' = 0$.

d. Menyelidiki apakah nilai optimal yang dicapai merupakan titik minimum atau maksimum.

e. Mensubstitusikan hasil perhitungan ke dalam fungsi tujuan nonlinear untuk mendapatkan solusi optimal.

Dari hasil perhitungan dengan metode *penalty* diperoleh rata-rata produksi tanaman pangan total dari padi, ketela pohon dan jagung, yaitu 387,0586 kwintal dengan luas panen padi (x_1) 520,75 hektar, luas panen ketela pohon (x_2) 33,6426 hektar, dan luas panen jagung (x_3) 8,4817 hektar.

Saran

Menurut Tabel 1 dari tahun 1994 sampai 2014 belum pernah dicapai rata-rata produksi dari tanaman padi, ketela pohon dan jagung yang optimal. Oleh karena itu bagi pemerintah dan masyarakat disarankan bekerjasama untuk meningkatkan rata-rata produksi tanaman pangan di kota Magelang, misalnya dengan melakukan sosialisasi cara budidaya tanaman pangan yang baik dan benar terutama ketela pohon dan jagung. Metode optimasi model nonlinear ada banyak metode, misalnya metode *Separable*, metode *Zoutendijk*, dan metode Fungsi Penalti Interior (metode *Barrier*). Selain itu pembentukan fungsi tujuan juga bisa menggunakan metode *Singular Value Decomposition* (SVD).

DAFTAR PUSTAKA

BPS Kota Magelang. (1995-2015). *Kota Magelang Dalam Angka.* Magelang: BPS Kota Magelang.

BPS Provinsi Jawa Tengah. (2013). *Produksi Padi dan Palawija.* Semarang: BPS Provinsi Jawa Tengah.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. (2006). *Nonlinear Programming.* New York: John Wiley & Sons.

Efria Lemadona. (2015). *Penyelesaian Program Nonlinear Dengan Metode Kuadratik Pada Portofolio Saham.* Yogyakarta: FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to Operations Research.* New York: McGraw-Hill.

Maria Martini L K. (2008). *Metode Fungsi Penalti Eksterior.* Yogyakarta: Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sanata Dharma.

Peressini, A. L., Sullivan, F. E., & Uhl, J. J. (1988). *The Mathematics of Nonlinear Programming.* New York: Springer-Verlag Inc.

Rao, S. S. (2009). *Engineering Optimization : Theory and Practice, Fourth Edition.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

Siswanto. (2007). *Operation Research Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

Suyadi Prawirosentono. (2005). *Riset Operasi dan Ekonofisika.* Jakarta: PT Bumi Aksara.

Taha, H. A. (2007). *Operation Research And Introduction.* USA: New Jersey.

Tri Wahyu Agung Nugroho. (2006). *Optimisasi Program Nonlinear Dengan Kendala Menggunakan Metode Penalty dan Metode Barrier.* Yogyakarta: FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

Vina Puspita Dewi; Parhusip, Hanna Arini; Linawati, Lilik. (2013). *Analisis Hasil Panen Padi Menggunakan Pemodelan Kuadratik.* Semarang: Seminar Nasional Matematika VII UNNES.

Winston, W. L. (2003). *Operations Research : Application.* Boston: Duxbury Press.

Yuni Embriana D U. (2015). *Efektivitas Penyelesaian Model Nonlinear Menggunakan Pendekatan Quadratic Programming dan Separable Programming Untuk Optimasi Biaya Produksi Pada Industri Bakpia 716.* Yogyakarta: FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.