TINJAUAN KASUS PERSAMAAN GELOMBANG DIMENSI SATU DENGAN BERBAGAI NILAI AWAL DAN SYARAT BATAS

ANALITICALLY REVIEW WAVE EQUATIONS IN ONE-DIMENSIONAL WITH VARIOUS INITIAL VALUE AND BOUNDARY CONDITIONS

Oleh: Agus Supratama[1)], Hartono[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
agus.suptam@gmail.com[1)], hartono@uny.ac.id[2)]

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bentuk-bentuk penyelesaian persamaan gelombang dimensi satu berdasarkan nilai awal syarat batas. Nilai awal yang digunakan berupa fungsi yang menyatakan simpangan awal dan kecepatan transversal awal. Syarat batas yang digunakan adalah *Dirichlet* dimana setiap permasalahan akan diberikan syarat batas yang berbeda jumlahnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu dicari bentuk umum persamaan gelombang dengan pemodelan matematika. Terdapat tiga metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan gelombang, yaitu D'Alembert formula, transformasi Laplace dan separasi variabel. Diperoleh tiga bentuk penyelesaian yang berbeda berdasarkan metode yang digunakan. Formulasi D'Alembert menghasilkan bentuk penyelesaian yang paling sederhana, sedangkan separasi variabel menghasilkan bentuk yang lebih rumit.

Kata kunci: Persamaan gelombang, D'Alembert, Laplace, Separasi variabel.

Abstract

This research aims to know the solution forms of one-dimensional wave equation based on initial value boundary conditions. Initial value used is a function which states the initial deviation and initial transversal velocity. Boundary Conditions used is Dirichlet with every problem will be given different number of boundary conditions. In this research, we first find the general form of the wave equation by mathematic modeling. There was three methods used to find solutions of wave equation, that was D'Alembert formula, Laplace transforms and separation of variable. We get three different forms based on method we used. D'Alembert formula gives a simplest solution form, while separation of variable gives a complex form.

Keywords: Wave equation, D"Alembert, Laplace, Separation of variabel.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan salah satu ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan permasalahan terutama masalah-masalah fisis. Masalah fisis yaitu permasalah yang berhubungan dengan hukum-hukum fisika atau gejala alam.. Permasalahan fisis sederhana dapat dijelaskan dalam bentuk persamaan diferensial biasa, akan tetapi permasalahan fisis yang lebih kompleks harus dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial parsial.

Salah satu masalah fisis yang sering dijumpai adalah masalah gelombang. Terdapat bermacam-macam masalah gelombang, salah satunya adalah persamaan gelombang pada dawai yang merupakan persamaan gelombang dimensi satu. Masalah gelombang yang dibahas oleh Irpan Susanto dalam skripsi berjudul "Deret Fourier, Konsep dan Terapanya pada Persamaan Gelombang Satu Dimensi" pada tahun 2011 penyelesaian persamaan gelombang dengan deret Fourier.

Masalah nilai awal dan syarat batas menjadi penting ketika membahas persamaan gelombang. Banyaknya syarat batas yang diberikan akan mempengaruhi metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang. Terdapat beberapa metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang, antara lain separasi variabel, transformasi Laplace dan formulasi D'Alembert.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bentuk-bentuk penyelesaian persamaan gelombang berdasarkan syarat batas yang diberikan.

METODE PENELITIAN

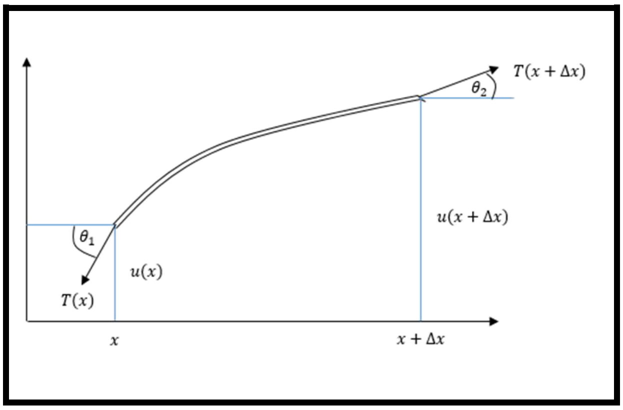
Secara umum, desain penelitian ini adalah membentuk persamaan gelombang dimensi satu dengan memdelkan secara matematis. Persamaan gelombang selanjutnya dicari solusinya dengan tiga metode yaitu formulasi D"Alembert, transformasi Laplace dan separasi variabel. Diberikan masing-masing dua contoh pada setiap metode yang disajikan dan pergerakan gelombang divisualisaikan dengan alat bantu program aplikasi *Maple.*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan suatu dawai yang lentur tetapi sangat kuat. Asumsi-asumsi pada dawai sebagai berikut:

1. Masa per satuan panjangnya adalah konstan karena dawai homogen. Dawai yang homogen diharapkan dapat memberikan defleksi yang sempurna.
2. Tegangan pada dawai lebih besar dibandingkan gravitasi bumi. Jika tegangan dawai lebih kecil dari gravitasi, dawai akan kendur dan tak bisa bergetar dengan sempurna.
3. Penampang dawai dianggap sangat kecil sehingga volume dawai akan sebanding dengan panjang dawai itu sendiri.
4. Gerakan gelombang pada dawai hanya pada arah vertikal.

Apabila dawai digetarkan akan membentuk simpangan gelombang. Untuk memodelkan persamaan gelombang, dawai dipartisi sepanjang Δx maka akan terlihat sebagai berikut



Gambar 1 Partisi dari seutas dawai yang digetarkan

Pada gambar tersebut, u menyatakan simpangan gelombang sehingga $u(x)$ adalah simpangan di titik x dan $u(x+\Delta x)$ adalah simpangan $x+\Delta x$.

Diasumsikan bahwa partikel dawai hanya bergerak pada arah vertikal, maka resultan gaya yang bekerja pada sumbu horisontal adalah nol, yakni

$$\sum F_x = \mathrm{T}(x+\Delta x)\cos\theta_2 - \mathrm{T}(x)\cos\theta_1 = 0$$

Tegangan pada bagian dawai adalah

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{T}}{\cos\theta_1}$$

$$\mathrm{T}(x+\Delta x) = \frac{\mathrm{T}}{\cos\theta_2}.$$

Sedangkan resultan gaya pada arah vertikal yaitu

$$\sum F_u = \mathrm{T}(x+\Delta x)\sin\theta_2 - \mathrm{T}(x)\sin\theta_1$$

$$= \mathrm{T}\tan\theta_2 - \mathrm{T}\tan\theta_1.$$

Karena akan menghitung persinggungan ketika $\Delta t \to 0$, maka dinyatakan dalam bentuk parsial $\frac{\partial u}{\partial x}$. Dengan demikian diperoleh

$$\sum F_u = \mathrm{T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right).$$

Berdasarkan Hukum II Newton,

$$\sum F_u = \Delta m.a$$

dimana $\Delta m = \mu.\Delta x$. Percepatan a didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu sesaat, sehingga

$$\sum F_u = \mu.\Delta x.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \mu.\Delta x.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Dengan demikian diperoleh hubungan

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mathrm{T}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)}{\Delta x}.$$

Jika $\Delta x\to 0$, maka berdasarkan definisi turunan parsial, diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\mathrm{T}}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

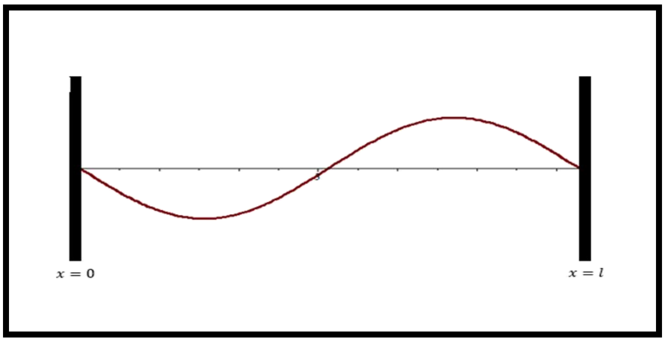
Atau dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad C=\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$$

Selanjutnya, akan dibahas mengenai penyelesaian persamaan gelombang dimensi satu pada dawai. Kasus yang dipilih adalah dawai dengan panjang berhingga, dawai dengan panjang semi-tak berhingga dan dawai dengan panjang tak berhingga.

1. Dawai dengan panjang berhingga (memiliki dua syarat batas)

Dawai dengan panjang berhingga adalah dawai yang memiliki panjang dari $x=0$ hingga $x=l$ dan merentang sepanjang sumbu x. Jika divisualisasikan, akan tampak seperti berikut.



Gambar 2 dawai dengan panjang berhingga

Kedua ujung dawai ditetapkan terikat pada $x=0$ dan $x=l$ sehingga simpangan pada kedua ujung dawai sama dengan nol, maka dipunyai dua syarat batas, yaitu $u(0,t)=0$ dan $u(l,t)=0$. Untuk menyelesaikan masalah ini, dapat menggunakan metode separasi variabel.

Diberikan persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Asumsikan persamaan tersebut mempunyai penyelesaian

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

maka, turunan kedua dari $u(x,t)$ terhadap x dan t berturut-turut adalah

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=X''(x)T(t)$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=X(x)T''(t).$$

Dengan melakukan substitusi ke persamaan gelombang, maka diperoleh

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{C^2T(t)}.$$

Karena kedua ruas masing-masing hanya bergantung pada satu variabel maka dapat dipecah menjadi persamaan diferensial biasa dengan menambahkan konstanta pemisah. Pilih $-\lambda$ sebagai konstanta pemisah, sehingga

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{C^2T(t)}=-\lambda$$

Diperoleh

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$
$$T''(t)+\lambda C^2T(t)=0.$$

Terdapat tiga kemungkinan untuk nilai λ yaitu $\lambda>0$, $\lambda=0$ dan $\lambda<0$. Yang akan digunakan adalah nilai λ yang tidak menghasilkan solusi trivial. Dengan melakukan substitusi kemungkinan-kemungkinan nilai λ dan juga syarat batas yang diberikan, diperoleh

$$X_n(x)=B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dan

$$T_n(t)=D_n\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)+E_n\sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)$$

Karena X bergantung pada n dan T juga bergantung pada n, maka fungsi u juga bergantung pada n. Sehingga diperoleh solusi

$$u_n(x,t)=\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dengan $a_n=B_nD_n$ dan $b_n=B_nE_n$.

Selanjutnya, dengan menerapkan prinsip superposisi diperoleh penyelesaian umum dalam bentuk

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Untuk mendapatkan penyelesaian khusus, diperlukan adanya nilai awal. Dalam persamaan gelombang, nilai awal yang bekerja adalah simpangan awal dan kecepatan transversal awal ketika dawai bergetar. Jika dimisalkan simpangan awal dawai adalah $f(x)$ dan kecepatan transversal awal adalah $g(x)$ maka dipunyai nilai awal

$$u(x,0)=f(x) \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x).$$

Dari nilai awal $u(x,0)=f(x)$ diperoleh

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Dengan konversi deret Fourier sinus untuk $f(x)$ diperoleh

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Dari nilai awal $u_t(x,0)=g(x)$ diperoleh

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi C}{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Dengan konversi deret Fourier sinus untuk $g(x)$ diperoleh

$$b_n=\frac{2}{n\pi C}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Sehingga diperoleh penyelesaian khusus persamaan gelombang dalam bentuk

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dengan konversi

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

dan

$$b_n=\frac{2}{n\pi C}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Selanjutnya akan disajikan dua contoh terkait dengan nilai awal yang diberikan**.**

contoh 1

Diberikan seutas dawai yang kedua ujungnya terikat. Dawai digetarkan dengan memberikan kecepatan transversal awal $g(x)=0$ dan simpangan awal $f(x)$ dimana

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le \frac{l}{4}\\ 4h\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{4}\right), & \frac{l}{4}<x\le\frac{l}{2}\\ 4h\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{l}\right), & \frac{l}{2}<x\le\frac{3l}{4}\\ 0, & \frac{3l}{4}<x\le l\end{cases}$$

dengan h adalah tinggi simpangan. Solusi khusus persamaan gelombang tersebut adalah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dengan

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

dan

$$b_n=\frac{2}{n\pi C}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Selanjutnya dengan melakukan substitusi nilai awal $f(x)$ dan $g(x)$ diperoleh

$$a_n=\frac{32h}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left[\sin^2\left(\frac{n\pi}{8}\right)\right]$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi C}\int_0^l 0\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=0$$

Dengan demikian diperoleh

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{8}\right) * \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right).$$

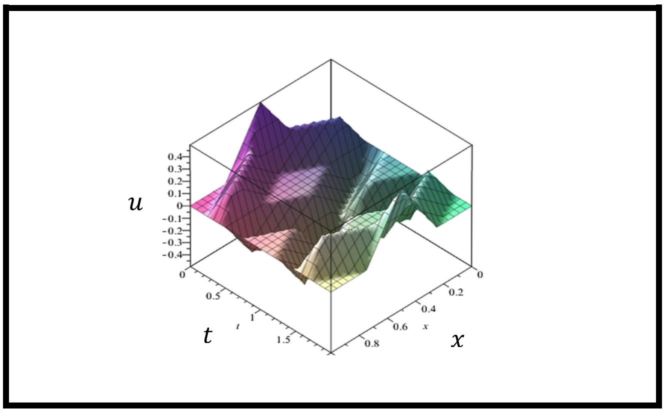
Untuk nilai n genap mengakibatkan $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ bernilai 0 yang berdampak $u(x,t)=0$. Agar $u(x,t)$ tidak bernilai 0, maka n haruslah bilangan ganjil. Ambil substitusi $n=2m-1$ dengan $=1,2,\dots$, sehingga

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)=(-1)^{m+1}.$$

Dengan demikian penyelesaian tersebut dapat dituliskan sebagai

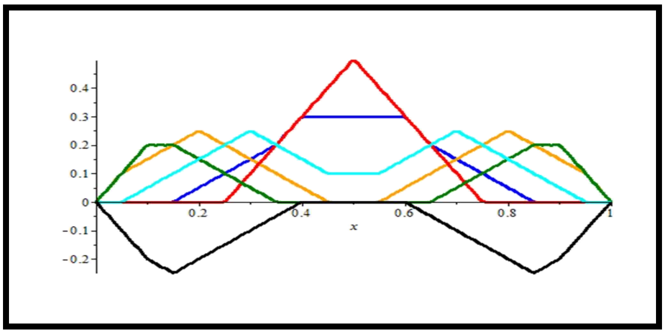
$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\sin^2\left(\frac{(2m-1)\pi}{8}\right) * \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{(2m-1)\pi Ct}{l}\right).$$

Jika divisualisasikan menggunakan program *Maple,* dengan mengambil nilai $C = 1$, $l = 1$ dan $h = 0{,}5$ akan tampak seperti berikut



Gambar 3 visualisasi simpangan dengan nilai awal $f(x)$

Apabila ditampilkan dalam bentuk dua dimensi, akan terlihat seperti berikut



Gambar 4 Pergerakan gelombang pada berbagai waktu $t = 0$ sampai $t = 0{,}65$

Dari Gambar 14 dapat dilihat perbedaan bentuk simpangan yang terjadi pada setiap titik x akibat dari perubahan waktu. Ketika $t = 0$, bentuk simpangan yang terjadi adalah simpangan awal yang diberikan sebagai nilai awal, yang ditunjukkan oleh warna merah pada Gambar 14. Untuk $0 < t \leq 0{,}65$, terjadi perubahan terhadap bentuk simpangan awal. Simpangan gelombang yang terjadi memiliki nilai maksimum $u(x,t) = 0{,}5$. Hal ini menunjukkan bahwa simpangan maksimumnya tidak melebihi tinggi maksimum simpangan awal yang ditentukan yaitu $h = 0{,}5$. Di kedua titik ujung yaitu di titik $x = 0$ dan $x = 1$, tidak terjadi simpangan karena dawai terikat pada kedua titik ujung.

Contoh 2

Diberikan seutas dawai yang kedua ujungnya terikat. Dawai digetarkan dengan memberikan kecepatan transversal awal $g(x) = \frac{x(x-l)}{8}$ dan simpangan awal $f(x) = 0$. Solusi khusus persamaan gelombang pada kasus tersebut adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

dan

$$b_n = \frac{2}{n\pi C}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Selanjutnya dengan melakukan substitusi nilai awal $f(x)$ dan $g(x)$ diperoleh

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 0\ \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = 0$$

$$b_n = \frac{l^3}{2(n\pi)^4 C}(1-(-1)^n).$$

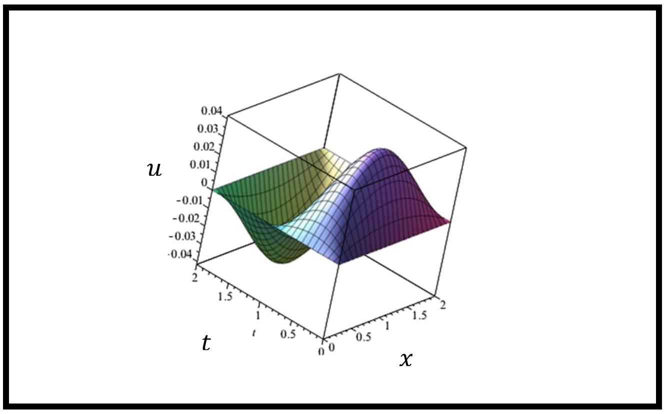
Dengan demikian diperoleh

$$u(x,t) = \frac{l^3}{2\pi^4 C}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n^4} * \sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Untuk nilai n genap mengakibatkan nilai dari $(1-(-1)^n) = 0$ sehingga penyelesaiannya juga akan bernilai 0. Agar $u(x,t)$ tidak bernilai 0 maka n haruslah bilangan ganjil. Ambil substitusi $n = 2m - 1$ dengan $= 1,2, \dots$,

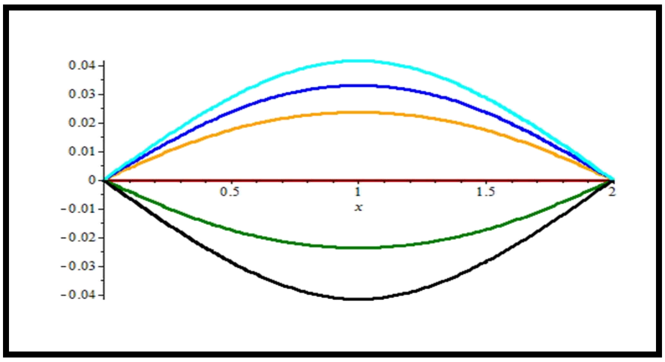
$$u(x,t) = \frac{l^3}{2\pi^4 C}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}(1-(-1)^{(2m-1)}) * \sin\left(\frac{(2m-1)\pi Ct}{l}\right)\sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{l}\right).$$

Jika divisualisasikan dalam program *Maple,* dengan mengambil nilai $C = 2$, dan $l = 2$ akan tampak seperti berikut



Gambar 5 visualisasi simpangan dengan nilai awal $g(x) = \frac{x(x-l)}{8}$

Apabila ditampilkan dalam bentuk dua dimensi, akan terlihat seperti berikut

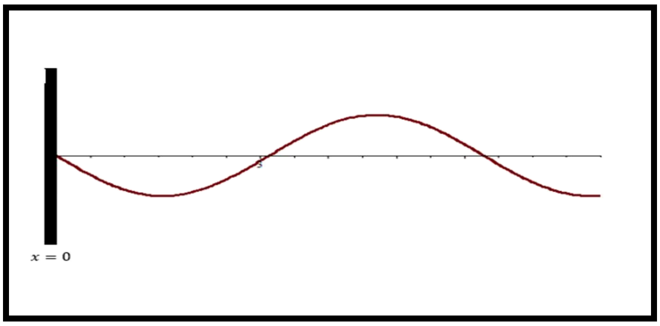


Gambar 6 Pergerakan gelombang pada berbagai waktu $t = 0$ sampai $t = 1{,}5$

Dari gambar tersebut, terlihat bahwa di titik $x = 0$ dan $x = 2$ tidak terjadi simpangan karena kedua titik tersebut merupakan titik ujung dawai yang terikat. Titik-titik pada sumbu x selain titik $x = 0$ dan $x = 2$, semuanya mengalami perubahan simpangan yang ditunjukkan dengan perbedaan warna pada Gambar 16. Terlihat bahwa setiap titik pada interval $0 < x < 2$ menunjukkan pergerakannya menjauhi sumbu x dan menuju searah sumbu u positif ketika memberikan nilai $t > 0$. Akan tetapi, ketika $t = 0{,}5$ dawai akan mencapai simpangan terjauhnya pada sumbu u positif yang ditunjukkan oleh warna biru muda. Untuk $t > 0{,}5$ simpangan dawai bergerak turun searah sumbu u negatif dan mencapai simpangan terjauh ketika $t = 1{,}5$ yang diwakili oleh kurva warna hitam.

2. Dawai dengan panjang semi-tak berhingga (memiliki satu syarat batas)

Dawai dengan panjang semi-tak berhingga adalah dawai yang memiliki panjang dari $x = 0$ hingga $x = \infty$ dan merentang sepanjang sumbu x. Jika divisualisasikan, akan tampak seperti berikut.



Gambar 7 dawai dengan panjang semi-tak berhingga

Dawai dengan panjang semi-tak berhingga maksudnya adalah dawai yang diberikan satu syarat batas. Syarat batas pada kondisi ini adalah $u(0,t) = 0$. Untuk menyelesaikan kasus seperti ini, dapat menerapkan metode transformasi Laplace. Sama seperti sebelumnya, nilai awal yang diberikan adalah

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x).$$

Sekarang tinjau persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan tersebut, sehingga

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right\} = C^2 \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\}$$

$$s^2 U(x,s) - su(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s)$$

Substitusikan nilai awal ke persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s) - \frac{s^2}{C^2} U(x,s) = h(x,s)$$

dengan $h(x,s) = \frac{1}{C^2} g(x) - \frac{s}{C^2} f(x)$. Persamaan tersebut merupakan bentuk persamaan diferensial biasa tak-homogen sehingga penyelesaianya merupakan penjumlahan antara solusi homogen dan partikularnya. Solusi homogen pada persamaan tersebut adalah

$$y_h = A(s)e^{-\frac{s}{C}x} + B(s)e^{\frac{s}{C}x}$$

Selanjutnya menentukan solusi partikularnya dengan menerapkan metode variasi parameter. Dengan metode variasi parameter diperoleh

$$y_p = \left[-\frac{C}{2s}\int h(x,s)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int h(x,s)e^{-\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{\frac{s}{C}x}$$

Dengan demikian,bentuk penyelesaian umum persamaan gelombang adalah

$$U(x,s) = A(s)e^{-\frac{s}{C}x} + B(s)e^{\frac{s}{C}x} + \left[-\frac{C}{2s}\int h(x,s)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int h(x,s)e^{-\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{\frac{s}{C}x}$$

Dari syarat batas $U(0,s)$ diperoleh

$$U(0,s) = B(s) + A(s) + \left[-\frac{C}{2s}\int h(x,s)\,dx\right] + \left[\frac{C}{2s}\int h(x,s)\,dx\right] = 0$$

Diperoleh $B(s) = -A(s)$. Selanjutnya dari $\lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0 + B(s)e^{\frac{s}{C}x} + 0 + 0 = 0$$

Diperoleh $B(s) = 0$, sehingga nilai $A(s) = 0$. Dengan demikian diperoleh penyelesaian

$$U(x,s) = \left[-\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{-\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{\frac{s}{C}x}$$

Dengan melakukan invers Laplace, diperoleh penyelesaian khusus

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[-\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{-\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{\frac{s}{C}x}\right\}$$

Selanjutnya akan disajikan dua contoh terkait dengan nilai awal yang diberikan

Contoh 1

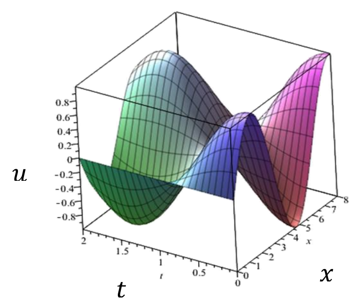
Diberikan seutas dawai yang salah satu ujungnya terikat. Dawai digetarkan dengan memberikan simpangan awal $f(x) = \sin(x)$ dan kecepatan transversal awal $g(x) = 0$. Penyelesaian khusus simpangan dawai tersebut adalah

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[-\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{-\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{\frac{s}{C}x}\right\}.$$

Dengan melakukan substitusi nilai awal yang diberikan, diperoleh penyelesaian

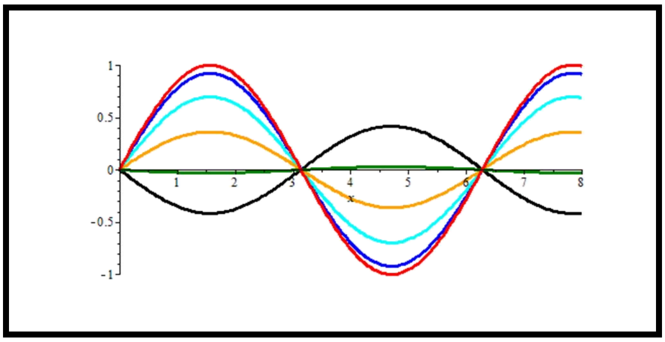
$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\sin(x)}{C^2+s^2}\right\} = \cos(Ct)\sin(x)$$

Jika divisualisasikan dalam program *Maple*, dengan mengambil nilai $C = 2$ akan seperti berikut



Gambar 8 visualisasi simpangan dengan nilai awal $f(x) = \sin(x)$

Apabila ditampilkan dalam bentuk dua dimensi, akan terlihat seperti berikut



Gambar 9 Pergerakan gelombang pada berbagai waktu $t = 0$ sampai $t = 1$

Jika diperhatikan, semua bentuk gelombang pada Gambar 9 saling berpotongan pada suatu titik x dan memotong sumbu x di titik yang sama. Dari perhitungan, diperoleh titik potong tersebut adalah $x = 0; x = \pi$ dan $x = 6{,}28$. Jika membatasi interval hanya pada $0 \leq x \leq \pi$ hal ini terlihat seolah-olah dawai memiliki dua syarat batas *Dirichlet* yang ditetapkan nol karena kedua titik ujung tidak memiliki simpangan untuk setiap waktu t yang diberikan. Yang membedakannya adalah bahwa simpangan dawai ini hanya akan berpotongan dengan sumbu x di titik $x = 0;\ x = \pi$ dan kelipatanya. Hal ini karena memilih nilai awal berupa fungsi $\sin(x)$ yang selalu memotong sumbu x di titik $x = (n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Contoh 2

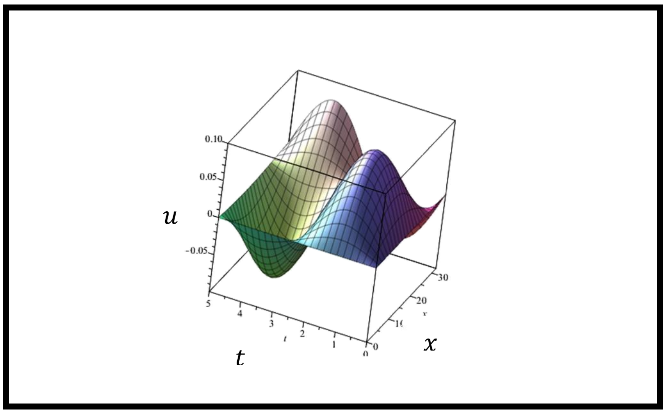
Diberikan seutas dawai yang salah satu ujungnya terikat. Dawai digetarkan dengan memberikan simpangan awal $f(x) = 0$ dan kecepatan transversal awal $g(x) = -\frac{1}{8}\sin\left(\frac{x}{8}\right)$. Penyelesaian dari simpangan dawai tersebut adalah

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[-\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int\left(\frac{1}{C^2}g(x) - \frac{s}{C^2}f(x)\right)e^{-\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{\frac{s}{C}x}\right\}.$$

Dengan melakukan substitusi nilai awal yang diberikan, diperoleh penyelesaian

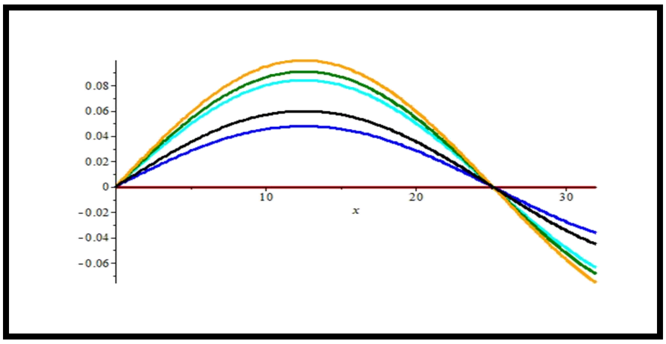
$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8\sin\left(\frac{x}{8}\right)}{C^2 + 64s^2}\right\} = \frac{1}{C}\sin\left(\frac{Ct}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{8}\right)$$

Jika divisualisasikan dalam program *Maple,* dengan mengambil nilai $C = 10$ akan tampak seperti berikut.



Gambar 10 visualisasi simpangan dengan nilai awal $g(x) = -\frac{1}{8}\sin\left(\frac{x}{8}\right)$

Apabila ditampilkan dalam bentuk dua dimensi, akan terlihat seperti berikut



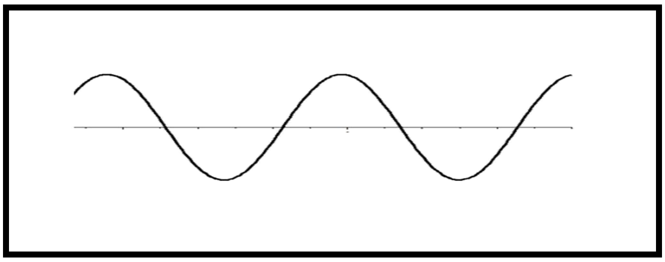
Gambar 11 Pergerakan gelombang pada berbagai waktu $t = 0$ sampai $t = 2$

Jika diperhatikan, pada interval $0 \leq x \leq 32$ pada gambar tersebut terdapat dua perpotongan dari simpangan-simpangan dengan sumbu x. Melalui perhitungan dapat diketahui bahwa titik-titik perpotonganya adalah titik $x = 0$ dan $x = 25{,}12$. Sama seperti sebelumnya, jika membatasi dawai pada interval $0 \leq x \leq 25{,}12$ akan terlihat seolah-olah dawai memiliki dua syarat batas. Akan tetapi simpangan gelombang tersebut hanya berlaku jika mengambil nilai $x = 0$, $x = 25{,}12$ dan kelipatanya. Hal ini terjadi karena memilih nilai awal berupa fungsi sinus yang selalu memotong sumbu x di titik $x = (n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Sedangkan untuk persamaan gelombang dengan dua syarat batas akan selalu berpotongan dengan sumbu x di titik $x = 0$ dan $x = l$ berapapun nilai yang diberikan.

3. Dawai dengan panjang tak berhingga (tidak memiliki syarat batas)

Dawai dengan panjang tak berhingga adalah dawai yang memiliki panjang dari $x = -\infty$ hingga $x = \infty$ dan merentang sepanjang sumbu x. Jika divisualisasikan, akan tampak seperti berikut.



Gambar 12 dawai dengan panjang tak berhingga

Dawai dengan panjang tak berhingga memiliki artian bahwa dawai tersebut tidak memiliki syarat batas. Untuk menyelesaikan persamaan gelombang yang tidak memiliki syarat batas, dapat menggunakan formulasi D'Alembert. Persamaan gelombang dari pemodelan sebelumnya dapat dituliskan sebagai

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - C\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Akar-akar riil dari persamaan tersebut adalah $dx = C\,dt$ dan $dx = -C\,dt$. Integralkan kedua akar riil tersebut sehingga diperoleh

$$k_1 = x - Ct \qquad \text{dan} \qquad k_2 = x + Ct$$

Karakteristik tersebut yang akan digunakan sebagai variabel bebas baru dalam formulasi D'Alembert.

Pilih $p = x + Ct$ dan $q = x - Ct$ sebagai variabel bebas baru. Dengan demikian, fungsi u sekarang bergantung pada variabel p dan q. Dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + 2\frac{\partial u}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$$

dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} - 2\frac{\partial u}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)$$

Substitusikan kedua persamaan tersebut ke persamaan gelombang sehingga diperoleh

$$4C^2\frac{\partial u}{\partial p \partial q} = 0.$$

Berdasarkan asumsi kedua, $T \neq 0$ sehingga $C \neq 0$, sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial p \partial q} = 0.$$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas, maka diperoleh

$$u = F(p) + G(q)$$

dengan $F(p)$ merupakan suatu fungsi atas p dan $G(q)$ merupakan fungsi atas q. Selanjutnya substitusikan $p = x + Ct$ dan $q = x - Ct$ ke persamaan tersebut sehingga diperoleh penyelesaian umum

$$u(x,t) = F(x + Ct) + G(x - Ct)$$

Untuk mendapatkan penyelesaian khusus, diperlukan adanya nilai awal. Dalam persamaan gelombang, nilai awal yang bekerja adalah simpangan awal dan kecepatan transversal awal ketika dawai bergetar. Jika simpangan awal dawai adalah $f(x)$ dan kecepatan transversal awal adalah $g(x)$ maka dipunyai nilai awal

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x).$$

Dengan melakukan substitusi nilai awal ke persamaan umum, maka diperoleh

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2C}\int g(x)\,dx$$

dan

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2C}\int g(x)\,dx$$

Apabila $F(x)$ dan $G(x)$ disubstitusikan ke pernyelesaian umum, diperoleh bentuk

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x + Ct) + f(x - Ct)]$$

$$+ \frac{1}{2C}\int_{x-Ct}^{x+Ct} g(s)ds$$

yang merupakan bentuk penyelesaian khusus persamaan gelombang tanpa syarat batas.

Berikut ini disajikan dua contoh terkait dengan nilai awal yang diberikan.

Contoh 1

Diberikan seutas dawai yang kedua ujungnya bergerak bebas. Dawai digetarkan dengan memberikan simpangan awal $f(x) = \sin(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ dan kecepatan transversal awal $g(x) = 0$. Karena dawai tidak memiliki syarat batas, maka penyelesaian khususnya adalah

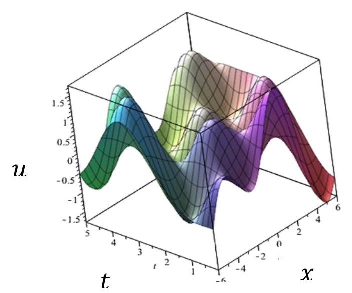
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+Ct) + f(x-Ct)]$$

$$+\frac{1}{2C}\int_{x-Ct}^{x+Ct} g(s)ds.$$

Substitusikan kedua nilai awal yang diberikan ke penyelesaian khusus sehingga diperoleh

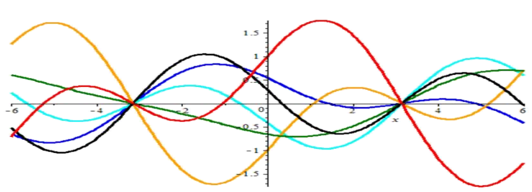
$$u(x,t) = \sin(x)\cos(Ct) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{Ct}{2}\right)$$

Jika divisualisasikan dalam program *Maple,* dengan mengambil nilai $C = 2$ akan tampak seperti berikut



Gambar 13 visualisasi simpangan dengan nilai awal $f(x) = \sin(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Apabila ditampilkan dalam bentuk dua dimensi, akan terlihat seperti berikut



Gambar 4 Pergerakan gelombang pada berbagai waktu $t = 0$ sampai $t = 5$

Dalam interval $-6 \leq x \leq 6$ pada gambar tersebut terdapat dua perpotongan dari simpangan-simpangan dengan sumbu x. Melalui perhitungan dapat diketahui bahwa titik-titik perpotonganya adalah titik $x = -\pi$ dan $x = \pi$. Jika membatasi dawai pada interval $-\pi \leq x \leq \pi$ akan terlihat seolah-olah dawai memiliki dua syarat batas karena pada kedua titik ujung interval tersebut tidak terjadi perubahan simpangan. Akan tetapi simpangan gelombang tersebut hanya berlaku jika mengambil nilai $x = -\pi$, $x = \pi$ dan kelipatanya. Yang membedakan dengan persamaan gelombang yang diberi dua syarat batas yaitu persamaan gelombang dengan dua syarat batas akan selalu berpotongan dengan sumbu x di titik $x = 0$ dan $x = l$ berapapun nilai l yang diberikan.

Contoh 2

Diberikan seutas dawai yang kedua ujungnya bergerak bebas. Dawai digetarkan dengan memberikan simpangan awal $f(x) = 0$ dan kecepatan transversal awal $g(x) = \frac{1}{8}\sin(2x)$. Dengan nilai awal yang diberikan, akan dicari bentuk simpangan gelombang tersebut.

Penyelesaian khusus pada kasus ini adalah

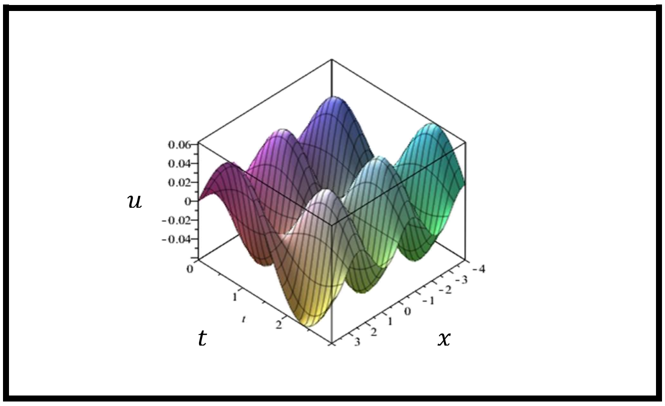
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+Ct) + f(x-Ct)]$$

$$+\frac{1}{2C}\int_{x-Ct}^{x+Ct} g(s)ds.$$

Substitusikan kedua nilai awal yang diberikan ke penyelesaian khusus tersebut sehingga diperoleh penyelesaian

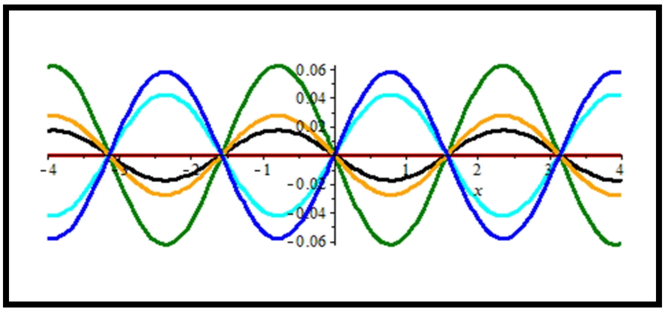
$$u(x,t) = \frac{1}{16C}\sin(2x)\sin(2Ct).$$

Jika divisualisasikan menggunakan program *Maple,* dengan mengambil nilai $C = 1$ akan tampak seperti berikut.



Gambar 5 visualisasi simpangan dengan nilai awal $g(x) = \frac{1}{8}\sin(2x)$

Apabila ditampilkan dalam bentuk dua dimensi, akan terlihat seperti berikut



Gambar 6 Pergerakan gelombang pada berbagai waktu $t = 0$ sampai $t = 3$

Dalam gambar tersebut, terdapat titik-titik potong antara bentuk simpangan gelombang dengan sumbu x pada interval $-4 \leq x \leq 4$. Melalui perhitungan diperoleh fakta bahwa perpotongan tersebut terjadi di titik $x = -\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}; x = 0; x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \pi$. Jika interval diperpanjang maka akan ada titik-titik potong lain dengan sumbu x di titik yang merupakan kelipatan dari $x = -\pi$ dan $x = \pi$. Hal ini terjadi karena penyelesaian persamaan gelombang membentuk fungsi sinus yang akan selalu berpotongan dengan sumbu x di titik $x = (n\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

SIMPULAN DAN SARAN

1. simpulan

Dengan mendefinisikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai nilai awal, diperoleh hasil:

(a) bentuk umum persamaan gelombang dimensi satu yaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(b) solusi persamaan gelombang dengan dua syarat batas dalam bentuk

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi Ct}{l}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

dengan substitusi

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi C}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

(c) solusi persamaan gelombang dengan satu syarat batas dalam bentuk

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[-\frac{C}{2s}\int\left(\frac{-s}{C^2}f(x) + \frac{1}{C^2}g(x)\right)e^{\frac{s}{C}x}\,dx\right]e^{-\frac{s}{C}x} + \left[\frac{C}{2s}\int\left(\frac{-s}{C^2}f(x) + \frac{1}{C^2}g(x)\right)e^{-\frac{s}{C}x}dx\right]e^{\frac{s}{C}x}\right\}$$

(d) solusi persamaan gelombang tanpa syarat batas dalam bentuk

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

2. Saran

Penelitian ini membahas persamaan gelombang dimensi satu dalam bentuk homogen. Diharapkan dalam penelitian selanjutnya membahas dan menganalisis untuk persamaan gelombang dimensi satu dalam bentuk non-homogen. Selain itu, juga perlu adanya analisis lanjutan pada metode-metode yang telah dipaparkan tersebut untuk meninjau persamaan gelombang dengan dimensi yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Boas, Mary L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. Third edition. New York: John Wiley & Sons, Inc

Demang, Helmi & Evi Noviani. (2013). *Penyelesaian Persamaan Gelombang dengan Metode d'Alembert*. Bulletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapanya, vol. 02, No 1, pp. 1-6

Duffy, Dean G. (2003). *Advanced Engineering Mathematics with Matlab.* Second edition. New York: A CRC Press Company

Esmar Budi. (2013). *Gelombang*. Bandung: Remaja Rosdakarya offset

Humi, Mayer & William B Miller. (1992). *Boundary Value Problem and Partial Differential Equations.* Boston: PWS-KENT Publishing Company

Irpan Susanto. (2011). Deret Fourier, Konsep dan Terapanya pada Persamaan Gelombang Satu Dimensi. *Skripsi.* Universitas Negeri Semarang

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics.* Tenth edition. New York: John Wiley & Sons, Inc

Strauss, W.A. (2008). *Partial Differential Equation An Introduction*. Second edition. New York: John Wiley & Sons, Inc

Zill, Dennis G & Warren S Wright. (2013). *Differential Equations with Boundary-Value Problem.* Eight edition. New York. Cengage Learning