SIFAT-SIFAT KETEGAKLURUSAN, KESEJAJARAN, DAN SEGITIGA ASIMPTOTIK PADA GEOMETRI HIPERBOLIK

CARACTERISTICS OF PERPENDICULARITY, PARALLELISM, AND ASYMPTOTIC TRIANGLES IN HYPERBOLIC GEOMETRY

Oleh: Humam Rosyadi[1)], Himmawati Puji Lestari, M.Si[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
[1)]humamrosyadi2@gmail.com [2)]himmawatipl@yahoo.com

Abstrak

Geometri Hiperbolik adalah geometri yang didasarkan pada Postulat Kesejajaran Hiperbolik. Sifat-sifat pada Geometri Hiperbolik memiliki kesamaan dan perbedaan dengan Geometri Euclid yang telah lebih dahulu ada. Tujuan dari penelitian ini adalah meneliti sifat-sifat pada Geometri Hiperbolik yaitu sifat-sifat ketegaklurusan, kesejajaran, dan segitiga asimptotik. Sifat ketegaklurusan meliputi: 1. pada dua garis yang sejajar, tidak mungkin ada lebih dari dua titik dalam sebuah garis memiliki jarak yang sama dari garis kedua, 2. apabila dua buah garis sejajar dipotong oleh sebuah garis tranversal tepat di titik tengah garis tegaklurus persekutuan, sudut dalam yang terbentuk oleh tranversal dan dua garis sejajar adalah kongruen. Sifat kesejajaran meliputi: 1. sinar-sinar sejajar asimptotik merupakan sinar-sinar yang membentuk sudut kesejajaran, 2. sudut kesejajaran besarnya kurang dari 90°, 3. sinar-sinar sejajar asimptotik memiliki garis sejajar persekutuan dan tidak memiliki garis tegaklurus persekutuan. Sifat segitiga asimptotik meliputi: 1. segitiga asimptotik merupakan segitiga dengan titik ideal 2. dua buah segitiga yang sebangun maka keduanya kongruen, 3. kekongruenan Sisi-Sudut dan Sudut-sudut berlaku pada segitiga asimptotik single, 4. Kesusesuaian sudut-sudut berhingga berlaku pada segitiga dobel asimptotik, dan 5. sebarang dua segitiga trebel saling kongruen.

Kata kunci: Geometri Hiperbolik, sejajar persekutuan, tegaklurus persekutuan, segitiga asimptotik.

Abstract

Hyperbolic geometry is based on the Hyperbolic Parallel Postulat. Hyperbolic geometry have the same and diferent chararteristics as Euclidean geometry. The purpose of this research is to know the chararteristics of the perpendicularity, the parallelism, and asymptotic triangles in Hyperbolic geometry. The charateristics of the perpendicularity are: 1.Given two parallel line, there cannot be three distinct points on one line that are equidistant from a second line, 2. Two parallel lines cut by a tranversal and passes the midpoint of the common perpendicular segment if and only if the alternate interior angles formed by tranversal and two parallel lines are congruent. The chararteristics of the parallelism are: 1. Asymptotic parallel rays are the rays that form the angle of parallelism, 2. Angle of parallelism is less than 90°*, 3. Asymptotic parallel rays have a common parallel ray and does not have a common perpendicular line. The chararteristics of asymptotic triangles are: 1. Asymptotic triangles is triangle with ideal points.2 the two simillar triangles are congruent, 3. Angle-Side (AS) and Angle-Angle (AA) condition are valid congruence condition in singly asymptotic triangles 4. Corresponding the finite angle is valid triangle congruence condition in doubly asymptotic triangles, 5. All trebly asymptotic triangles are congruent.*

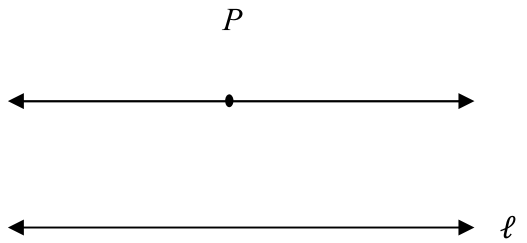
Keywords: Hyperbolic geometry, common parallel, common perpendicullar, asymptotic triangle.

PENDAHULUAN

Geometri yang pertama-tama muncul sebagai suatu sistem deduktif adalah Geometri dari Euclid. Sekitar tahun 330 SM, Euclid menulis buku sebanyak 13 buah dengan mengumpulkan materi dari berbagai sumber. Buku (naskah) tersebut mengalami beberapa kali transliterasi. Naskah tersebut kemudian dikenal sebagai The Elements atau Euclid's Elements. Salah satu ilmuan yang memiliki andil dalam menganalisis dan menulis kembali The Elements adalah ahli sejarah J.L Heiberg. Dalam bukunya yang pertama Euclid menjelaskan mengenai definisi, postulat, aksioma (*common notions*) dan dalil. Euclid melalui bukunya telah menjelaskan beberapa definisi dan lima kebenaran "nyata" yang dinamakan postulat.

Menurut J.L Heiberg (2008:7), Postulat Kelima Euclid adalah "Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus (lainnya) dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku (kurang dari 180°), kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu dipihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari sudut siku (dan tidak bertemu di sisi lainnya)."

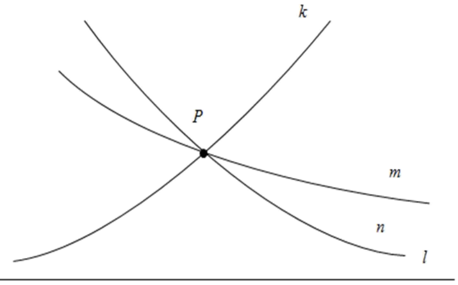
Postulat Kelima Euclid menyebabkan perbedaan pendapat di kalangan ilmuwan matematika mengenai kebenaran postulat tersebut. Selama dua ribu tahun, para ilmuwan matematika berusaha membuktikan bahwa Postulat Kelima Euclid atau Postulat Kesejajaran Euclid tidaklah benar. Beberapa ilmuwan berusaha membuktikannya, sebagian hanya mengulang Postulat Kesejajaran Euclid dalam bentuk baru seperti yang dikemukakan oleh John Playfair. Menurut Marvin J. Greenberg (1994:19), Postulat Kelima Euclid atau postulat Playfair adalah "Untuk setiap garis ℓ dan untuk setiap titik P yang tidak terletak pada ℓ ada paling banyak sebuah garis m yang melalui P dan sejajar dengan ℓ."



Gambar 1 Ilustrasi Postulat Kesejajaran Euclid (Postulat Playfair)

Beberapa ilmuwan telah gagal dalam membuktikan bahwa Postulat Kesejajaran Euclid merupakan sesuatu yang salah, namun usaha pembuktian ini menyadarkan matematikawan lain bahwa postulat tersebut tidaklah pasti dan memungkinkan adanya teori yang lain dari geometri yang dibangun dari Postulat Kesejajaran Euclid. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860), dan Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) secara terpisah menemukan gagasan yang benar-benar baru dan berlawanan dengan Postulat Kesejajaran Euclid (Venema, 2012: 132).

Lobachevsky mengatakan bahwa "untuk setiap garis ℓ dan untuk setiap titik P yang tidak terletak pada ℓ, ada paling sedikit dua garis m dan n sehingga P terletak pada m dan n dan m dan n sejajar dengan ℓ (Venema, 2012: 21). Postulat menurut Lobachevsky ini dikenal dengan Kesejajaran Hiperbolik. Postulat Kesejajaran Hiperbolik sepadan dengan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid (Venema, 2012: 105). Gagasan baru yang merupakan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid tersebut menjadi dasar dari Geometri Hiperbolik.



Gambar 2 Ilustrasi Postulat Kesejajaran Hiperbolik (Postulat kesejajaran Lobachevsky)

Postulat Kesejajaran Hiperbolik mempengaruhi teorema yang lainnya, sehingga beberapa sifat yang ada pada Geometri Euclid bisa saja berbeda dalam Geometri Hiperbolik. Postulat Kesejajaran Hiperbolik menjadi dasar dari sifat-sifat mengenai ketegaklurusan, kesejajaran dan segitiga (segitiga asimptotik) pada Geometri Hiperbolik. Sifat-sifat tersebut memiliki kesamaan dan perbedaan dengan sifat yang terdapat pada Geometri Euclid yang telah terlebih dahulu dikenal.

Pada penelitian ini akan dibahas sifat-sifat mengenai ketegaklurusan, kesejajaran dan segitiga (segitiga asimptotik) pada Geometri Hiperbolik. Penelitian ini membutuhkan teori mengenai Geometri Insidensi, Geometri Netral, Geometri Euclid, dan Geometri Hiperbolik.

Geometri Netral

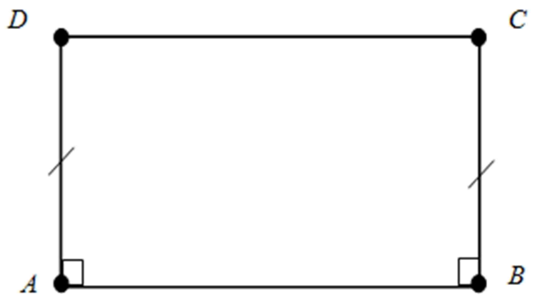
Geometri Netral (terkadang disebut sebagai geometri absolut) merupakan dasar-dasar geometri. Geometri Netral didasarkan kepada empat postulat pertama Euclid. Menurut Greenberg (1994: 14-19) empat postulat tersebut adalah sebagai berikut.

1. *Untuk setiap titik P dan setiap titik Q yang berlainan dengan P ada sebuah garis tunggal ℓ yang melalui P dan Q.*
2. *Untuk setiap ruas garis $\overline{AB}$ dan setiap ruas $\overline{CD}$ ada sebuah titik E sehingga B berada di antara A dan E dan ruas $\overline{CD}$ kongruen dengan ruas $\overline{BE}$.*
3. *Untuk setiap titik O dan setiap titik A tidak sama dengan O terdapat sebuah sebuah lingkaran dengan pusat O dan jari-jari $\overline{OA}$.*
4. *Semua sudut siku-siku saling kongruen.*

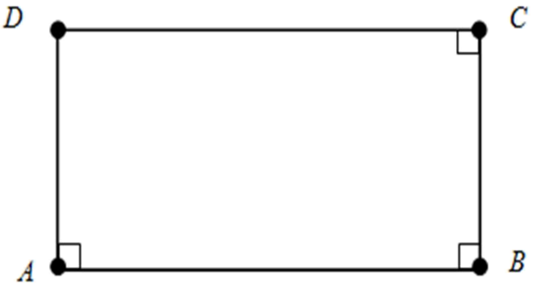
Geometri Netral juga merupakan geometri yang memenuhi enam postulat yang merupakan pengembangan (bentuk lain) dari empat postulat pertama Euclid. Enam postulat tersebut adalah Postulat Eksistensi, Postulat Insidensi, Postulat Penggaris, Postulat Pemisahan Bidang, Postulat Busur dan Postulat Sisi-Sudut-Sisi.

Geometri Netral tidak terikat terhadap Postulat Kesejajaran (Postulat Kelima Euclid maupun Postulat Kesejajaran Hiperbolik) sehingga berlaku bagi Geometri Euclid maupun Hiperbolik.

Dalam Geometri Netral tidak terdapat persegi. Adanya persegi ekuivalen dengan mengasumsikan bahwa Postulat Kesejajaran Euclid benar dalam Geometri Netral. Pada faktanya, Geometri Netral adalah geometri tanpa postulat kesejajaran. Dalam Geometri Netral terdapat segiempat yang memiliki dua sudut siku-siku (segiempat Saccheri) dan segiempat dengan tiga sudut siku-siku (segiempat Lambert).



Gambar 3 Segiempat Saccheri $\boxed{S}\,ABCD$ Memiliki Dua Sudut Siku di Titik A dan B



Gambar 4 Segiempat Lambert $\boxed{L}\,ABCD$ dengan Tiga Sudut Siku-siku yaitu di Titik A, B, dan C

Geometri Euclid

Geometri Euclid dikembangkan oleh Euclid dikenal juga sebagai Geometri Parabolik. Geometri Euclid didasarkan pada lima asumsi dasar yang dinamakan aksioma atau postulat (Greenberg,1994:14).

Lima aksioma dasar tersebut adalah empat aksioma yang mendasari Geometri Netral ditambah Postulat Kesejajaran Euclid. Geometri Euclid juga dapat diartikan sebagai geometri yang memenuhi semua postulat maupun teorema yang terdapat pada Geometri Netral dan Postulat Kesejajaran Euclid (atau semua teorema yang sepadan dengan Postulat Kesejajaran Euclid).

Geometri Hiperbolik

Geometri Hiperbolik adalah geometri yang didasarkan pada enam postulat pada Geometri Netral dan postulat Kesejajaran Hiperbolik. Geometri Hiperbolik memiliki nama lain yaitu geometri Lobachevsky diambil nama profesor matematika Rusia, Nicolai Ivanovich Lobachevsky dari Universitas Kazan.

Postulat kesejajaran Hiperbolik pada dasarnya merupakan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid yang dinyatakan. Menurut Venema (2012: 105), "*Postulat Kesejajaran Hiperbolik setara dengan ingkaran dari Postulat Kesejajaran Euclid.*"

Pada Geometri Hiperbolik terdapat beberapa sifat-sifat yang mirip dengan Geometri Euclid yang telah dikenal maupun sifat-sifat yang berbeda. Beberapa sifat-sifat tersebut akan dibahas pada bagian pembahasan.

PEMBAHASAN

Pada bagian pembahasan akan dibahas mengenai sifat-sifat pada Geometri Hiperbolik yaitu: sifat-sifat ketegaklurusan, kesejajaran dan segitiga asimptotik.

Sifat-sifat Ketegaklurusan pada Geometri Hiperbolik

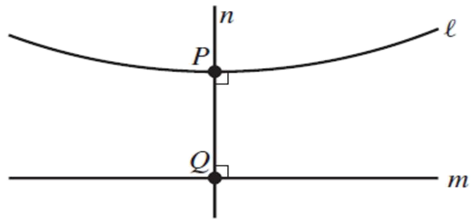
Sifat-sifat ketegaklurusan pada Geometri Hiperbolik maupun Geometri Euclid dipengaruhi oleh postulat kesejajaran yang berlaku pada masing-masing geometri. Akibatnya, sifat-sifat ketegaklurusan pada kedua geometri memiliki perbedaan.

Sifat-sifat ketegaklurusan berkaitan dengan adanya garis tegaklurus persekutuan atau *common perpendicular*. Adanya garis tegaklurus persekutuan pada Geometri Hiperbolik mengubah cara berfikir mengenai sifat-sifat ketegaklurusan dan memberikan gambaran yang benar-benar baru mengenai adanya klasifikasi garis sejajar.

Pada Geometri Netral terdapat Teorema Sudut Dalam Berseberangan yang mengatakan bahwa "*dua garis ℓ dan ℓ' yang dipotong oleh tranversal t sedemikian hingga sepasang sudut berseberangannya kongruen, maka garis ℓ sejajar ℓ'*" (Venema, 2012: 82). Teorema ini berlaku bagi Geometri Euclid, pada Geometri Hiperbolik terdapat syarat yang harus dipenuhi.

Geometri Euclid memberikan gambaran mengenai garis-garis sejajar sebagai garis-garis yang memiliki jarak yang tetap sama untuk setiap pasangan titik bersesuaian. Menurut Venema (2012: 138), pada Geometri Hiperbolik berlaku "*Jika ℓ adalah sebuah garis, P adalah titik eksternal dan m adalah sebuah garis sedemikian hingga P berada pada m, maka hanya ada sebuah titik Q dimana $Q \neq P, Q$ berada pada m, dan $d(Q,\ell) = d(P,\ell)$.*" Hal ini berarti, pada dua garis yang sejajar, tidak tidak mungkin ada lebih dari dua titik dalam sebuah garis memiliki jarak yang sama dari garis kedua. Artinya, ada satu garis dimana ia tegak lurus pada kedua garis. Garis tersebut adalah garis tegak lurus persekutuan.

Ruas garis $\overline{PQ}$ pada Gambar 5 merupakan ruas garis persekutuan, sedangkan garis n pada Gambar 5 merupakan garis tegaklurus persekutuan.



Gambar 5 Garis Tegaklurus Persekutuan

Torema Sudut Dalam Berseberangan apat berlaku jika garis t yaitu tranvesal melalui titik tengah dari ruas garis tegaklurus persekutuan. Menurut Venema (2012: 138), "*Misalkan ℓ dan m adalah garis-garis paralel yang dipotong oleh garis trasversal t. Sudut dalam berseberangan yang dibentuk oleh ℓ dan m dengan tranversal t adalah kongruen jika dan hanya jika ℓ dan m memiliki sebuah garis tegaklurus persekutuan dan t memotong titik tengah ruas garis tegaklurus persekutuan.*"

Kenyataan ini menunjukan salah satu klasifikasi dari garis-garis sejajar. Garis-garis sejajar yang memiliki tranversal yang tepat di titik tengah ruas garis tegaklurus persekutuan. Garis-garis sejajar ini memiliki sifat divergen dan disebut dengan garis-garis *ultraparallel.*

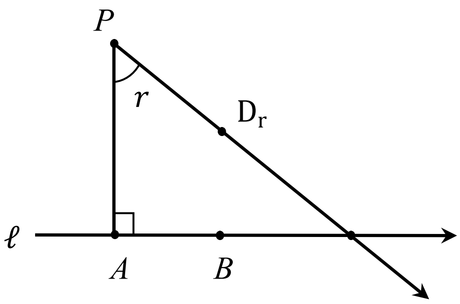
Sifat-sifat Kesejajaran pada Geometri Hiperbolik

Sifat-sifat kesejajaran berkaitan dengan adanya sudut kesejajaran, limit sinar-sinar garis sejajar (sinar-sinar sejajar asimptotik) yang muncul akibat konsekuensi dari Postulat kesejajaran Hiperbolik. Garis-garis semacam ini tidak memiliki garis tegak lurus persekutuan. Hal ini mengindikasikan bahwa terdapat klasifikasi lain pada jenis garis-garis ultraparallel. Garis-garis tersebut dikenal sebagai garis-garis sejajar asimptotik.

Sifat kesejajaran diwali dengan pembahasan sudut kesejajaran. Pembahasan mengenai sudut kesejajaran meliputi pembahasan mengenai nilai kritis (*critical number*), sudut kesejajaran (*angle of parallelism*), dan fungsi kesejajaran (*critical function*).

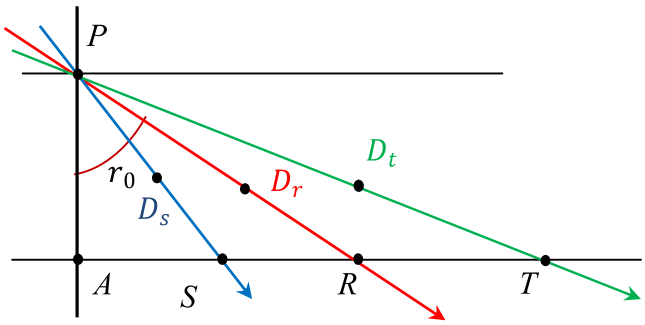
Pembahasan mengenai sudut kesejajaran diawali dengan mengkontrusksi himpunan beririsan K. Menurut Venema (2012: 140), misalkan ℓ adalah sebuah garis dan P adalah sebuah titik diluar ℓ. Tarik garis tegaklurus dari P ke ℓ di titik A Terdapat B pada ℓ dan $B \neq A$. Untuk setiap bilangan r dengan $0 \leq r \leq 90°$ ada titik D_r, pada sisi yang sama dari $\overleftrightarrow{PA}$ sebagaimana B, sedemikian hingga $\mu(\angle APD_r) = r$. Dengan K adalah

$$K = \{r | \overrightarrow{PD_r} \cap \overrightarrow{AB} \neq \emptyset\}.$$



Gambar 6 Kontruksi K (Himpunan Beririsan untuk P dan sinar $\overrightarrow{AB}$)

Sesuai dengan konstruksi himpunan K, sudut r merupakan sudut kesejajaran. Dapat diamati bahwa $0 \in K$ dan $90° \notin K$. Jadi K adalah subset dari interval $[0,90°)$. Menurut Venema (2012: 141), "*Misalkan K adalah irisan untuk P dan* $\overrightarrow{AB}$. *Jika* $r \in K$, *maka* $s \in K$ *untuk setiap* s *dengan* $0 < s < r$, *dan ada* $t \in K$ *sehingga* $t > r$." Berdasar fakta tersebut himpunan K adalah interval setengah terbuka dari rumus $[0, r_0)$, dengan r_0 merupakan nilai kritis. Berdasarkan hal tersebut udut kesejajaran adalah lancip.

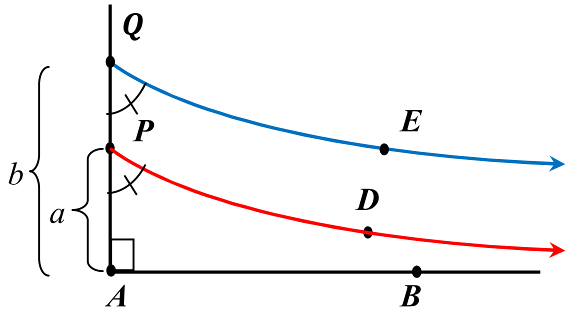


Gambar 7 Ilustrasi dari Himpunan Beririsan pada Sinar Garis

Misalkan terdapat titik-titik P, A dan B seperti dalam konstruksi himpunan bagian dan bahwa r_0 adalah nilai kritis untuk P dan $\overrightarrow{AB}$.

Misalkan D adalah sebuah titik pada setengah bidang $H_{\overrightarrow{PA},B}$ sehingga $\mu(\angle APD_r) = r_0$. Sudut $\angle APD_r$ dinamakan sudut kesejajaran untuk P dan $\overrightarrow{AB}$.

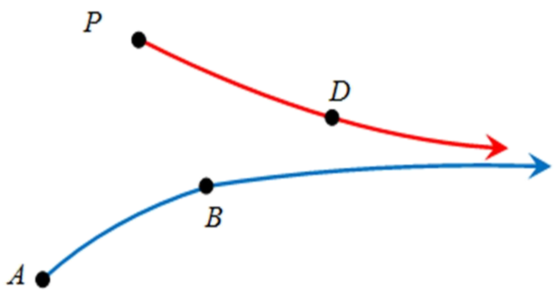
Nilai kritis hanya bergantung pada jarak $d(P, \ell)$, sehingga nilai kritis merupakan sebuah fungsi dari bilangan real, konsekuensinya adalah dapat didefinisikanya fungsi kritis. Ambil sebuah titik $B \neq A$ pada ℓ dan didefinisikan fungsi $\kappa(x) = \mu(\angle APD)$, dimana $\angle APD$ adalah sudut kesejajaran untuk P dan $\overrightarrow{AB}$. Fungsi kritis didefinisikan sebagai fungsi $\kappa: (0, \infty) \to (0,90°]$. Sifat dari fungsi kritis adalah fungsi kritis merupakan fungsi turun.



Gambar 8 Besar Sudut Kesejajaran Bersifat Turun (*Nonincreasi*ng), $a < b$ Berimplikasi $\kappa(a) \geq \kappa(b)$

Sinar-sinar Sejajar Asimptotik

Selanjutnya akan dibahas mengenai garis-garis sejajar asimptotik yang merupakan klasifikasi kedua jenis-jenis kesejajaran pada Geometri Hiperbolik. Selanjutnya akan dibahas terlebih dahulu sifat-sifat sinar-sinar sejajar asimptotik.



Gambar 9 Sinar Garis $\overrightarrow{PD}$ Sejajar Asimptotik dengan $\overrightarrow{AB}$

Gambar 9 menunjukan dua sinar-sinar yang sejajar asimptotik yaitu $\overrightarrow{PD}$ dan $\overrightarrow{AB}$. Sinar sejajar asimptotik ditulis $\overrightarrow{PD} \mid \overrightarrow{AB}$, terlihat pada gambar bahwa titik B dan D terletak pada setengah bidang yang sama yang dibentuk $\overleftrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PD} \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset$, dan setiap garis di antara $\overrightarrow{PD}$ dan $\overrightarrow{PA}$ memotong $\overrightarrow{AB}$. Terdapat sifat yang menyebutkan bahwa jika sinar garis $\overrightarrow{PD}$ dan $\overrightarrow{AB}$ merupakan sinar yang saling sejajar asimptotik maka garis-garis $\overleftrightarrow{PD}$ dan $\overleftrightarrow{AB}$ merupakan dua garis yang saling sejajar.

Terdapat sifat simetri, transitif, dan Eksistensi dan ketunggalan sinar-sinar sejajar asimptotik. Menurut Venema (2012: 145-148) sifat-sifat tersebut adalah berikut.

1. Sifat simetri sinar sejajar asimptotik, jika $\overrightarrow{PD} \mid \overrightarrow{AB}$, maka $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{PD}$.
2. Sifat transitif sinar sejajar asimptotik, jika $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{EF}$ adalah tiga sinar sedemikian hingga $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{EF}$, maka $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{EF}$ atau $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{EF}$ adalah sinar garis yang ekuivalen.
3. Eksistensi dan ketunggalan sinar sejajar asimptotik, jika $\overrightarrow{AB}$ adalah sebuah sinar garis dan P adalah sebuah sebuah titik yang tidak berada pada $\overleftrightarrow{AB}$, maka ada sebuah sinar garis tunggal $\overrightarrow{PD}$ sehingga $\overrightarrow{PD} \mid \overrightarrow{AB}$.

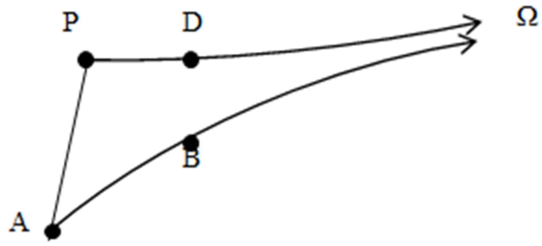
Garis-garis sejajar yang memiliki garis tegaklurus persekutuan bukan merupakan garis sejajar asimptotik. Berlaku kontraposisi dari pernyataan tersebut yaitu jika dua buah garis sejajar asimptotik maka keduanya tidak memiliki garis tegaklurus persekutuan. Hal ini menegaskan bahwa sinar-sinar sejajar asimptotik memunculkan klasifikasi garis-garis sejajar dalam Geometri Hiperbolik yang dikenal dengan garis-garis sejajar asimptotik.

Garis-garis sejajar asimptotik ini memunculkan salah bentuk bangun dalam geometri yaitu segitiga asimptotik.

Segitiga Asimptotik pada Geometri Hiperbolik

Berikut adalah definisi segitiga. Misal A, B, dan C adalah tiga titik nonkolinier. Segitiga ΔABC terdiri atas gabungan tiga Ruas garis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$; sehingga $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$. Definisi ini berlaku bagi segitiga pada Geometri Euclid maupun Hiperbolik. Secara umum segitiga pada Geometri Hiperbolik terbagi menjadi dua, segitiga biasa dan segitiga asimptotik. Segitiga asimptotik merupakan segitiga yang merupakan bentuk segitiga yang diakibatkan oleh adanya garis-garis sejajar asimptotik. Segitiga asimptotik memiliki sifat yang hampir sama dengan segitiga pada Geometri Hiperbolik.

Sebuah segitiga asimptotik terdiri atas dua sinar garis sejajar asimptotik yang tergubung bersama dengan sebuah ruas menghubungkan titik sudut. Secara khusus, jika $\overrightarrow{PD} \mid \overrightarrow{AB}$ maka $\Lambda DPAB = \overrightarrow{PD} \cup \overline{PA} \cup \overrightarrow{AB}$. Penulisan simbol lain adalah segitiga $\Delta AP\Omega$.



Gambar 10 Segitiga Asimptotik Single $\Lambda DPAB$ atau $\Delta AP\Omega$

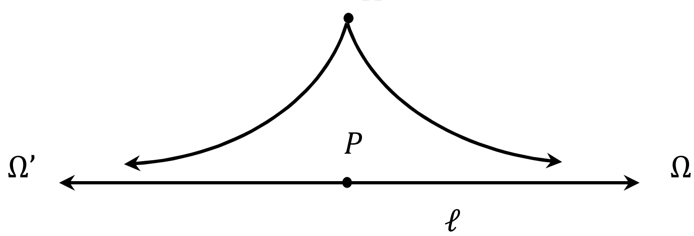
Gambar 10 memperlihatkan segitiga asimptotik single $\Delta AP\Omega$, titik Ω merupakan titik ideal. Disebut ideal karena kedua garis tidaklah benar-benar bertemu dan membentuk titik sudut.

Pada Geometri dua buah segitiga merupakan segitiga yang sebangun hanya apabila kedua segitiga tersebut merupakan segitiga yang saling kongruen.

Selanjutnya akan dibahas jenis-jenis segitiga asimptotik yaitu segitiga asimptotik single, dobel, dan trebel beserta sifat-siftnya (sifat kekongruenan segitiga). Menurut H.S.M Coxeter (1998: 188)," terdapat segitiga dengan satu titik ideal (titik di tak hingga), oleh karenanya dinamakan segitiga asimptotik single. Dengan cara yang sama, segitiga dengan dua atau tiga titik potong di tak hingga disebut segitiga asimptotik dobel dan trebel."

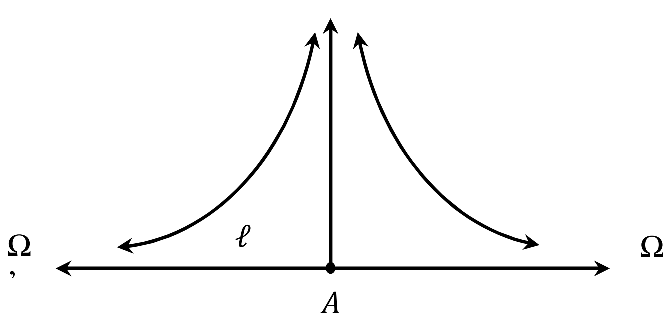
Segitiga asimptotik memiliki satu titik ideal dan sebuah sisis berhingga, Gambar 10 merupakan segitiga asimptotik single. Menurut Venema (2012: 151-152), kekongruenan dua segitiga asimptotik single berlaku pada kondisi Sisi-Sudut (S-Sd) dan Sudut-Sudut-Sudut (Sd-Sd-Sd). Segitiga asimptotik single hanya memiliki dua sudut berhingga sehingga Sd-Sd-Sd menjadi Sudut-Sudut.

Segitiga asimptotik dobel terdiri atas dua segitiga asimptotik single. Dengan kata lain, segitiga simptotik dobel adalah segitiga asimptotik yang memiliki dua titik ideal. Segitiga asimptotik dobel ditentukan oleh sudut tak nol (segitiga jenis ini tidak memiliki sisi berhingga) sehingga kekongruenan segitiga asimptotik dobel ditentukan oleh sudut positif. Dua buah segitiga asimptotik dobel merupakan segitiga yang saling kongruen jika kedua segitiga memiliki sudut berhingga yang sama besar. Gambar 11 berikut merupakan segitiga asimptotik dobel.



Gambar 11 Segitiga Asimptotik Dobel $\Delta A\Omega\Omega'$

Segitiga asimptotik trebel memiliki tiga titik ideal, dan tidak memiliki sisi berhingga. Segitiga asimptotik trebel terdiri dari dua segitiga asimptotik dobel, hal ini dapat diperhatikan pada Gambar 12. Dua buah segitiga asimptotik trebel merupakan segitiga yang saling kongruen. Jika segitiga asimptotik trebel dibagi hingga menjadi segitiga asimptotik single, maka kekongruenan dua segitiga tersebut dapat diamati.



Gambar 12 Segitiga asimptotik trebel $\Delta\Omega\Omega'\Omega''$

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Dari uraian dan pembahasan, diperoleh simpulan sebagai berikut.

1. Pada garis-garis yang sejajar tidak mungkin ada lebih dari dua titik dalam sebuah garis memiliki jarak yang sama terhadap garis kedua. Jika ℓ dan m adalah garis-garis sejajar dan ada dua titik pada m yang sama jarak dari ℓ, maka ℓ dan m memiliki sebuah garis tegaklurus persekutuan. Dengan kata lain, dua garis yang tidak saling berpotongan memiliki garis tegaklurus persekutuan. Sifat dari garis tegaklurus persekutuan adalah apabila ada dua garis yang sejajar yang memiliki garis tegaklurus persekutuan, maka garis tegaklurus persekutuan itu tunggal Apabila sebuah garis tranversal memotong titik tengah garis tegaklurus persekutuan, sudut dalam yang terbentuk oleh tranversal dan dua garis sejajar adalah kongruen (garis-garis tersebut *ultraparallel*).
2. Sinar-sinar sejajar asimptotis merupakan sinar-sinar yang membentuk sudut kesejajaran. Sinar sinar sejajar asimptotis membentuk sudut kritis. Sinar yang membentuk sudut kritis merupakan sinar yang sejajar dan berpotongan di titik ideal atau titik akhir, meski sebenarnya tidak benar-benar berpotongan karena kedua sinar tersebut sejajar. Setiap sudut kesejajaran pada Geometri Hiperbolik adalah sudut lancip atau besarnya kurang dari 90°. Nilai kritis bergantung jarak sehingga serupa dengan bilangan riil pada Analisis Nyata dan membentuk sebuah fungsi κ (kappa). Fungsi $\kappa : (0, \infty) \to (0{,}90°]$ dan dinamakan fungsi kritis. Fungsi kritis merupakan fungsi turun (*nonincreasing*).
3. Menghubungkan dua titik pangkal dari dua sinar garis sejajar asimptotik membentuk sebuah segitiga asimptotik (segitiga yang memiliki titik ideal). Segitiga asimptotik pada Geometri Hiperbolik terdiri atas tiga segitiga yaitu: single asimptotik, dobel asimptotik dan trebel asimptotik. Nama dari segitiga tersebut menunjukkan banyaknya titik ideal pada segitiga tersebut. Pada Geometri Hiperbolik, dua buah segitiga

yang sebangun maka keduanya kongruen. Kekongruenan pada segitiga single asimptotik berlaku kekongruenan Sisi-Sudut dan Sudut-sudut. Kekongruenan pada segitiga dobel asimtotik terjadi jika sudut sudut bersesuaian pada kedua segitiga saling kongruen. Sebarang dua segitiga trebel merupakan segitiga yang kongruen.

Saran

Sifat-sifat yang dijelaskan hanya menggunakan ilustrasi yang dikembangkan oleh Venema dimana penggambaran garis hanya sebagai penjelas dan tidak menggunakan model tertentu. Ada beberapa model yang terkenal untuk menggambarkan sifat-sifat pada Geometri Hiperbolik yaitu: *half-plane,* piringan Klein (Klein-*disk*), dan piringan Poincar'e.

Penggunaan model tentu mempermudah peneliti untuk lebih mendalami Geometri Hiperbolik. Penelitian selanjutnya sekiranya dapat mengunakan model terutama Poincar'e. Beberapa penelitian lanjut yang penting untuk ditelaah adalah mengenai luasan segitiga hingga poligon, *horocircle*, trigonometri, dan lingkaran dalam segitiga.

DAFTAR PUSTAKA

Coxeter, H. S. M. 1998. *Non-Euclidean Geometry*. Washington, D.C: The Mathematical Association Of America.

Greenberg, Marvin Jay. 1993. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. New York: W.H. Freeman and Company.

Heiberg, J.L. 2008. *Euclid's Elements of Geometry*. (Alih bahasa: Richard Fitzpatrick). Diakses dari http://bookos-z1.org. Pada tanggal 17 November 2016, jam 12.30.

Venema, Gerard A. 2012. *Foundations of Geometry*. Boston: Pearson.