ANALISIS KEKONVERGENAN PADA BARISAN FUNGSI

THE CONVERGENCE ANALYZE ON THE SEQUENCE OF FUNCTION

Oleh: Restu Puji Setiyawan[1)], Dr. Hartono[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
restu026@gmail.com[1)] hartono@uny.ac.id[2]

Abstrak

Penelitian analisis kekonvergenan pada bariasan fungsi ini memiliki dua tujuan. Pertama, mengindentifikasi kekonvergenan pada barisan fungsi. Kedua, menganailisis sifat dari barisan fungsi yang konvergen. Ada dua jenis kekonvergenan pada barisan fungsi yaitu konvergen titik demi titik (*pointwise)* dan konvergen seragam. Terkait dengan jenis kekonvergenan dapat diturunkan beberapa sifat yang terkait dengan kekontinuan, integral, dan turunan. Pertama, limit dari barisan fungsi kontinu yang konvergen seragam merupakan fungsi kontinu. Kedua, limit dari barisan integral fungsi yang konvergen seragam pada interval tertutup memiliki nilai yang sama dengan integral dari limit barisan fungsi tersebut. Ketiga, misalkan suatu barisan fungsi konvergen ke f sedangkan barisan dari turunannya merupakan barisan fungsi kontinu dan konvergen seragam ke g, maka f merupakan fungsi kontinu dan turunan f sama dengan g.

Kata kunci: Barisan fungsi, konvergen, kekontinuan, integral, turunan

Abstract

Research on convergence analyze sequence of function had two aim. That was identify converge seqence of function and analyzed proprties sequence of function which uniform converge. Sequence of function had two variety converegence that was pointwise and uniform. Sequence of function which convergence had some properties, that had relation with continuity, integral and differential. The first was limit from sequence of continu function there was continu function. Second, limit from sequence of integral funciton which uniform converge had same value with integral from limit that sequence of function. Third, let a sequence of function which converge to f while the derivative sequence of function was sequence of continu function and uniform converged to g, then f was continu function and the derivative f same as g.

Keywords: Sequence of function, converge, continuity, integral, differential.

PENDAHULUAN

Fungsi adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek di daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal di daerah kawan (Varberg & Purcell, 2010:76). Fungsi dapat dinyatakan $f: A \to B$, yang artinya f merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B.

Barisan adalah suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli. Barisan dinotasikan dengan $\{x_n\}$ dan ditulis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Pada umumnya telah dikenal barisan bilangan riil $X: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, yaitu suatu barisan dengan daerah hasil bilangan riil. Barisan bilangan riil $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke x (dinotasikan dengan $\lim \{x_n\} = x$) jika untuk setiap bilangan positif ε yang diberikan terdapat bilangan asli N_ε sedemikian sehingga

$$|x_n - x| < \varepsilon,\ n \geq N_\varepsilon.$$

Dengan kata lain, jika $\lim \{x_n\} = x$ maka $\{x_n\}$ konvergen ke x.

Suatu barisan elemennya tidak harus bilangan akan tetapi bisa juga objek yang lain, sebagai contoh jika objeknya fungsi maka didapat barisan fungsi yang didefinisikan sebagi berikut. Barisan fungsi merupakan salah satu bentuk dari barisan yang elemen-elemennya berupa fungsi. Dimana bentuk fungsi yang merupakan suku ke-n bergantung pada bilangan asli. Barisan fungsi dinotasikan dengan $\{f_n\}$ dan ditulis $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$.. Salah satu contoh dari barisan fungsi adalah $\{f_n\} = \{\sin nx\} = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots.)$.

Seperti barisan pada umumnya, kekonvergenan barisan fungsi juga dapat diselidiki. Akan tetapi, tentu terdapat perbedaan perihal kekonvergenannya. Jika dianalogikan dengan suatu barisan bilangan riil yang terdiri dari titik-titik yang konvergen ke suatu titik, maka barisan fungsi akan konvergen ke suatu fungsi. Jika fungsinya bernilai riil maka barisan fungsi tersebut disebut dengan barisan fungsi bernilai riil. Sehingga pada penilitian ini akan dijelaskan mengenai kekonveregenan pada barisan fungsi bernilai riil yaitu konvergen titik demi titik dan konvergen seragam serta sifat-sifat barisan fungsi yang konvergen. Kekonvergenan pada barisan fungsi didefinisikan sebagai berikut.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Barisan fungsi memiliki dua jenis kekonvergenan yaitu konvergen *pointwise* dan konvergen seragam.

Definisi 1. (Goldberg, 1976:252)
Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen *pointwise* ke suau fungsi f jika $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, untuk setiap $x \in E$ dimana $E \subseteq \mathbb{R}$.

Contoh 1.
Nilai limit barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ untuk $x \in [0,1]$, nilai fungsi $f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ dan nilai limit untuk $n \to \infty$ dari barisan fungsi $\{f_n(x)\}$ atau $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Untuk $x \in [1, \infty)$ barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ tidak mempunyai nilai limit. Sebab, nilai limit $\frac{1}{\{f_n(x)\}}$ untuk $n \to \infty$ adalah $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f_n(x)} = 0$, akibatnya nilai $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$. Sehingga, barisan fungsi tersebut tidak mempunyai limit atau divergen. Dengan kata lain, barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ konvergen *pointwise* pada interval $[0,1]$ tetapi tidak konvergen *pointwise* pada interval $[1, \infty)$.

Terlihat bahwa ada tidaknya suatu limit pada barisan fungsi bergantung pada nilai x yang diberikan. Barisan fungsi yang konvergen *pointwise* pada barisan fungsi sering dikatakan barisan fungsi tersebut konvergen. Selain itu pada barisan fungsi yang konvergen *pointwise*, nilai n yang memenuhi agar barisan tersebut konvergen bergantung pada nilai x dan ε yang diberikan. Hal ini bersesuaian dengan suatu lemma di bawah ini.

Lemma 2. (Bartle, 2000: 229)
Suatu barisan fungsi $\{f_n\}$ pada himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$ konvergen ke suatu fungsi jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $x \in E$ ada bilangan asli $N_{\varepsilon,x}$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Bukti
($\Longrightarrow$) Jika $\{f_n\} \in E \subseteq \mathbb{R}$ konvergen *pointwise* ke suatu fungsi maka $\forall \varepsilon > 0$ dan $\forall x \in E$, $\exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Menurut Definisi 1. jika barisan fungsi konvergen ke suatu fungsi pada himpunan E maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Akibatnya

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Pada pertidaksamaan di atas tidak hanya nilai ε yang berpengaruh untuk menentukan nilai n agar pertidaksamaan tersebut terpenuhi, akan tetapi di dalam barisan fungsi tersebut juga terdapat nilai x yang berpengaruh terhadap pertidaksamaan tersebut sedemikian sehingga nilai n bergantung pada nilai ε dan x.

($\Longleftarrow$)Jika $\forall \varepsilon > 0$ dan $\forall x \in E$, $\exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ maka $\{f_n\}$ konvergen *pointwise* ke suatu fungsi.
Pernyataan di atas mirip dengan definisi dari suatu barisan yang konvergen dimana pada pernyataan di atas dikatakan bahwa barisan fungsi konvergen ke suatu fungsi, tentunya pada barisan yang konvergen nilai n yang memenuhi agar barisan tersebut konvergen hanya bergantung pada nilai ε. Namun pada pernyataan tersebut bilangan asli n selain bergantung pada

ε, bilangan asli n bergantung pada nilai x yang diberikan hal ini dikarenakan nilai suatu fungsi bergantung pada nilai domain yang diberikan. Jadi jika ada nilai n yang memenuhi dengan syarat seperti di atas maka barisan fungsi tersebut konvergen ke suatu fungsi.

Definisi 3. (Goldberg, 1976:255)
Barisan fungsi $\{f_n\}$ bernilai riil di $E \subseteq \mathbb{R}$. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi *f* di *E,* jika diberikan $\varepsilon > 0$, $\exists$ $N_\varepsilon \ni |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n \geq N_\varepsilon, \ x \in E$. Fungsi $f(x)$ merupakan nilai limit dari $f_n(x)$ untuk nilai $n \to \infty$.

Dari Definisi 3. dapat dikatakan suatu barisan fungsi yang konvergen seragam sudah pasti barisan fungsi tersebut konvergen *pointwise* akan tetapi barisan fungsi yang konvergen *pointwise* belum tentu konvergen seragam.

Contoh 2.
Barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{n}\right\}$; $x \in [0,1]$. Fungsi $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0, x \in [0,1]$, barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{n}\right\}$ konvergen *pointwise* pada interval $[0,1]$ karena nilai limitnya ada dan barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{n}\right\}$ konvergen seragam menuju $f(x) = 0$ pada $x \in [0,1]$ karena nilai $\left|\frac{x}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, yang berarti jika diambil sebarang nilai $\varepsilon > 0$ ada nilai $n \geq N_\varepsilon$ sedemikian sehingga $\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon$ berlaku untuk semua $x \in [0,1]$.

Kekonvergenan seragam pada barisan fungsi dapat dilihat melalui beberapa cara selain dari Definisi 3. Diantaranya sebagai berikut:

Akibat 4. (Goldberg, 1976: 256)
Barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke *f* di E jika dan hanya jika $\exists \varepsilon_0 > 0 \ni \nexists \mathbb{N}$ yang memenuhi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0, \ \forall n \geq N_{\varepsilon_0}$, $\forall x \in E$.

Contoh 3.
Barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+nx^2}\right\}, x \in [0,1]$ nilai limitnya yaitu $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2} = 0$ dengan kata lain barisan fungsi $\{f_n(x)\}$ konvergen menuju 0. Barisan fungsi tersebut tidak konvergen seragam di $x \in [0,1]$ karena jika dipilih nilai $\varepsilon_0 = \frac{1}{8}$ dan nilai $x = 1$ maka nilai $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{1+n} - 0\right| = \frac{n}{n+1}$. Nilai $\frac{n}{n+1} > \frac{1}{8}$ yang berarti tidak ada nilai n yang memenuhi agar $\frac{n}{n+1} < \frac{1}{8}$.

Selain Akibat 4. Ada juga lemma yang dapat digunakan untuk melihat kekonvergenan seragam suatu barisan fungsi.

Lemma 5. (Bartle, 2000: 230)
Barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke fungsi f di E jika dan hanya jika untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ ada subbarisan $\{f_{n_k}\}$ dari $\{f_n\}$ dan barisan $\{x_k\}$ pada E sedemikian sehingga berlaku $\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

Bukti

($\Longrightarrow$) Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam menuju fungsi f maka ada $\varepsilon_0 > 0$ dan subbarisan f_{n_k} sedemikian sehingga $\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Untuk suatu ε_0 terdapat nilai x pada E sedemikian sehingga pertidaksamaan tersebut bernilai lebih dari atau sama dengan ε_0. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan di atas dapat berupa sebuah barisan $\{x_k\}$ pada E sedemikian sehingga $\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| \geq \varepsilon_0$.

($\Longleftarrow$) Andai f_n konvergen seragam ke f pada E, Diberikan $\varepsilon_0 > 0$ maka ada $n \geq N_\varepsilon$ sedemikian sehingga

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon_0, \qquad \forall\, x_k \in E$$

Barisan fungsi $\{f_{n_k}\}$ merupakan subbarisan dari $\{f_n\}$ maka subbarisan tersebut juga konvergen

$$\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| < \varepsilon_0$$

Terjadi kontradiksi, maka pengandaian harus dinegasikan. Jadi, terbukti bahwa f_n tidak konvergen seragam ke f.

Contoh 4.
Barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$, $x \in [0,1]$. Misalkan $\{f_{n_k}\}$ merupakan subbarisan dari $\{f_n\}$ dan (x_k) merupakan barisan pada interval $[0,1]$ dengan $n_k = k$ dan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Pilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, kita tinjau nilai $\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$, terlihat bahwa nilai dari $\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| > \frac{1}{4}$. Barisan fungsi $\{f_n(x)\}$ tidak konvergen seragam pada interval $[0,1]$.

Terdapat juga teorema selisih atau yang dikenal dengan Teorema Cauchy yang digunakan untuk melihat kekonvergenan seragam suatu barisan fungsi.

Teorema 6. (Kriteria Chauchy) (Goldberg, 1976: 257)
Barsian fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f di E jika dan hanya jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka ada bilangan asli $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikan sehingga $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, untuk semua $m, n \geq N_\varepsilon; x \in E$.
Bukti
($\Longrightarrow$) Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka ada bilangan asli $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikan sehingga $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, untuk semua $m, n \geq N_\varepsilon; x \in E$.
Diberikan $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$, barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f sedemikian sehingga

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

m merupakan bilangan asli juga dimana $m \geq N_\varepsilon$, berlaku

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nilai mutlak selisih dari suku ke-m dan suku ke-n

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka ada bilangan asli $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikan sehingga $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, untuk semua $m, n \geq N_\varepsilon; x \in E$ maka $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f di E.
Menurut ketaksamaan segitiga

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Maka nilai dari $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ atau $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ atau dengan kata lain $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f di E.

Contoh 5.
Barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{1 + \frac{x}{n}\right\}$, $x \in [0,1]$. Diberikan $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}$ maka ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N_\varepsilon$ berlaku $\frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{m} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan nilai dari

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &= \left|x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ yang artinya barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{1 + \frac{x}{n}\right\}$ konvergen seragam untuk $x \in [0,1]$.

Kekonvergenan pada barisan fungsi terdapat dua macam yaitu konvergen titik demi titik (*pointwise*) dan konvergen seragam. Setelah mengetahui barisan fungsi tersebut konvergen, selanjutnya dipelajari sifat-sifat dari barisan fungsi yang konvergen. Sifat yang dimaksud adalah sifat barisan fungsi konvergen yang melekat pada fungsi kontinu, fungsi yang terintegral, dan fungsi yang terdiferensial. Berikut ini beberapa teorema yang menjelaskan sifat-sifat barisan fungsi yang konvergen.

Teorema 7. (Kosmala, 2004: 347)
Barisan fungsi $\{f_n\}$ merupakan barisan fungsi yang kontinu dalam himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$ dan konvergen seragam ke f di E. Maka f kontinu di E.
Bukti.
Barisan fungsi $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi kontinu maka f_n merupakan fungsi kontinu. Fungsi f_n kontinu di $a \in E$, maka jika diberikan $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{3} > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ untuk $|x - a| < \delta$. Barisan fungsi $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi yang konvergen seragam ke f, jika diberikan $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{3} > 0$, maka ada bilangan asli $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. $a \in E$ dan $\{f_n\}$ konvergen seragam di E maka $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Akan dibuktikan f kontinu di E,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| \\ &\quad + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

Contoh 6.
Barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{x + \frac{1}{n}\right\}$ kontinu pada interval $[0,1]$ karena nilai $\lim_{x\to c} f_n(x) = f_n(c)$ dan juga barisan fungsi tersebut konvergen seragam menuju ke fungsi f pada interval $[0,1]$, jika diberikan $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}$ maka ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N_\varepsilon$ berlaku $\frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{m} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan nilai dari $|f_m(x) - f_n(x)| = \left|x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, dapat dilihat bahwa $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Nilai $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ dimana nilai $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ yang artinya fungsi f kontinu pada interval $[0,1]$.

Teorema 8. (Kosmala, 2004: 348)

Jika $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi kontinu yang konvergen seragam ke suatu fungsi f pada $[a,b]$ maka

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx$$

Bukti,

Barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam maka $\{f_n\}$ konvergen *pointwise* ke f, sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Barisan fungsi$\{f_n\}$ merupakan konvergen seragam pada interval $[a,b]$. Jika diberikan $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$, maka ada $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $x \in [a,b]$ dan $n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

Diperoleh,

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Jadi,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ekuivalen dengan

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Contoh 7.

Barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{n+1}\right\}$ kontinu pada interval $[0,1]$ karena $f_n(c) = \lim_{x\to c} f_n(x)$ dan barisan fungsi $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{n+1}\right\}$ konvergen seragam menuju f dengan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pada interval $[0,1]$. Nilai $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{n+1}dx = \frac{1}{n+1}$ dan $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x}{n+1}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Nilai $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx$.

Teorema 9. (Kosmala, 2004: 349)

Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan dari fungsi yang turunannya kontinu ($f_n{}'$ kontinu) dan konvergen titik demi titik ke fungsi f. Jika barisan $\{f_n{}'\}$ konvergen seragam ke fungsi g pada interval $[a,b]$, maka $f' = g$ pada interval $[a,b]$. Dengan kata lain $\{f_n{}'\}$ konvergen seragam ke f' pada interval $[a,b]$.

Bukti,

Diketahui fungsi $f_n{}'$ kontinu maka

$$\int_a^x f_n{}'(t)\, dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Barisan fungsi $f_n{}'$ konvergen seragam ke fungsi g dan barisan fungsi $f_n{}'$ kontinu maka

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n{}'(t)dt = \int_a^x \left[\lim_{n\to\infty} f_n{}'(t)\right] dt = \int_a^x g(t)dt.$$

Karena $\int_a^x f_n{}'(t)\, dt = f_n(x) - f_n(a)$, maka diperoleh

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a).$$

Persamaan di atas similar dengan persamaan pada teorema fundamental kalkulus untuk turunan dimana fungsi g adalah turunan dari fungsi f atau $g = f'$. Karena $f_n{}'$ merupakan barisan fungsi kontinu dan konvergen seragam menuju g, maka menurut Teorema 7. berlaku $g = f'$ merupakan fungsi kontinu. Barisan fungsi $f_n{}'$ konvergen seragam menuju fungsi g, karena fungsi $g = f'$ maka barisan fungsi $f_n{}'$ konvergen seragam menuju f.

Contoh 8.

Diberikan $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx^2}{n+1}\right\}$ pada interval $[0,1]$. Nilai $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx^2}{n+1} = x^2$. Turunan dari barisan fungsi tersebut adalah $\{f_n{}'(x)\} = \left\{\frac{2nx}{n+1}\right\}$. Barisan fungsi $\{f_n{}'(x)\} = \left\{\frac{2nx}{n+1}\right\}$ kontinu pada interval $[0,1]$, $\lim_{x\to c} f_n{}'(x) = f_n{}'(c)$ untuk setiap $c \in [0,1]$. Barisan fungsi $\{f_n{}'(x)\} = \left\{\frac{2nx}{n+1}\right\}$ konvergen seragam menuju fungsi $g(x) = 2x$, karena $\lim_{n\to\infty} sup|f_n'(x) - g(x)| = 0$. Fungsi $f(x) = x^2$ memiliki turunan yaitu $f'(x) = 2x$ dimana $\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$ maka $f'(x)$ kontinu pada interval $[0,1]$. Nilai $f'(x) = g(x)$ atau dengan kata lain barisan fungsi $\{f_n{}'(x)\}$ konvergen seragam menuju $f'(x)$.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Dari hasil pembahasan mengenai barisan fungsi dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu :

1. Barisan fungsi memiliki dua jenis kekonvergenan yaitu konvergen *pointwise* dan konvergen seragam. Jika barisan fungsi konvergen seragam maka barisan fungsi tersebut konvergen *pointwise* akan tetapi tidak berlaku sebaliknya.
2. Barisan fungsi yang konvergen memiliki sifat-sifat yang berkaitan dengan kekontinuan, integral dan turunan, diantaranya sebagai berikut:
   1) Barisan fungsi kontinu $\{f_n\}$ dan konvergen seragam ke fungsi f maka fungsi f kontinu.
   2) Barisan fungsi kontinu $\{f_n\}$ dan konvergen seragam ke fungsi f pada interval tertutup $[a, b]$ maka berlaku
   $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx.$$
   3) Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen *pointwise* ke fungsi f dengan $\{f_n{}'\}$ kontinu dan konvergen seragam ke fungsi g maka f' kontinu dan $f' = g$. Dengan kata lain $\{f_n{}'\}$ konvergen seragam ke f'.

Saran

Penelitian ini hanya membahas 3 sifat dari barisan fungsi konvergen. Harapannya penelitian selanjutnya dapat melakukan penelitian pada sifat barisan fungsi konvergen, seperti halnya barisan fungsi kontinu dan monoton yang konvergen ke suatu fungsi atau lebih dikenal dengan Teorema Dini.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Riil Analysis.* 3th. New York : John Wiley and Sons.

Brannan, David A. 2006. *A First Course in Mathematical Analysis.* New York : Cambridge University Press

Goldberg, Richard R. 1976. *Method of Riil Analysis.*New York : John Wiley and Sons.

Kosmala, Witold A.J. 2004. *A Friendly Introduction to Analysis Single and Multivariable*. 2nd. New Jersey: Pearson Education.

Marsden, Jerrold E. 1974. *Elementary Classical Analysis*. San Fransisco : W.H. Freeman and Company.

Varberg, Dale dan Edwin J. Purcell. 2010. *Kalkulus*. Jilid satu. (diterjemahkan oleh : I Nyoman Susila). Tangerang : Binapura Akasara Publisher.