ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL MATEMATIS *PREDATOR PREY* DENGAN DUA *PREDATOR*

Lia Listyana[1], Dr. Hartono[2], dan Kus Prihantoso Krisnawan,M.Si[3]

[1] Mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta

[2] Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta

[3] Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta

Email: [1] lia.listyana@yahoo.com, [2] hartono@uny.ac.id, dan [3] kuspk@uny.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis model matematis sistem *predator prey* dengan dua predator dan mengetahui jenis bifurkasi sistem tersebut dengan perubahan laju kematian kedua jenis *predator*. Model *predator prey* dengan dua *predator* memiliki lima titik ekuilibrium yang keberadaan tiga di antaranya bergantung pada laju kematian kedua jenis *predator* dan titik ekuilibrium yang lain tidak bergantung pada laju kematian kedua jenis *predator*. Kestabilan masing-masing titik ekuilibrium ditentukan berdasarkan nilai eigen masing-masing titik ekuilibrium. Perubahan kestabilan masing-masing titik ekuilibrium dan perubahan banyaknya titik ekuilibrium sebagai penanda terjadinya bifurkasi. Hasil perhitungan nilai eigen dan analisis secara numerik menunjukkan terjadinya bifurkasi pada sistem *predator prey* dengan dua *predator* saat laju kematian *predator* jenis I adalah 0.255 per satuan waktu dan laju kematian *predator* jenis II adalah 0.85 per satuan waktu.

Kata kunci : sistem *predator prey*, sistem *predator prey* dengan dua *predator*, titik ekuilibrium, bifurkasi

Abstract

This research aims to analyze the mathematical model predator prey system with two predators and knowing the kind of bifurcation of the system with changes in the mortality rate of two kinds of predators. Predator prey model with two predators has five equilibrium points that the existence of three of them depend on the mortality rate of two kinds of predators and the other equilibrium points does not depend on the mortality rate of two kinds of predators. The stability of each equilibrium point is determined by the eigenvalues of each equilibrium point . Changes stability of each equilibrium point and changes the number of equilibrium points as a marker of a bifurcation . The results of calculation of eigenvalues and numerical analysis indicate the occurrence of bifurcation of predator prey system with two predator when the mortality rate of predator type I is 0.255 per unit of time and the mortality rate of predator type II is 0.85 per unit time.

Keywords : predator-prey system, predator-prey system with two predators, equilibrium point, bifurcation

PENDAHULUAN

Tikus sawah (*Rattus argentiventer*) merupakan salah satu spesies hewan pengerat yang mengganggu aktivitas manusia terutama petani. Menurut Balai Besar Penelitian Tanaman Padi, tikus sawah merupakan hama utama penyebab kerusakan padi di Indonesia yang dapat menyebabkan kerusakan pada tanaman padi dari mulai persemaian sampai panen, bahkan sampai penyimpanan. Hama tikus sangat sulit dikendalikan karena tikus memiliki daya adaptasi, mobilitas, dan kemampuan untuk berkembang biak yang sangat tinggi. Namun, tikus juga mempunyai musuh alami yang yaitu ular jali atau ular koros (*Ptyas korros*) dan burung hantu serak jawa (*Tyto alba javanica*).

Ular jali sering ditemukan di sawah-sawah, kebun, dan pekarangan, terutama dekat dengan tepi sungai. Mangsa utamanya adalah hewan pengerat, terutama tikus, sedangkan burung hantu merupakan hewan nokturnal yang aktif pada malam hari. Burung hantu juga merupakan jenis hewan pemangsa tikus. Salah satu spesies burung hantu adalah burung hantu serak jawa (*Tyto alba javanica*) yang mempunyai karakteristik khusus yaitu mempunyai laju metabolisme yang lebih tinggi, sehingga membutuhkan banyak makanan.

Tikus, ular jali, dan burung hantu merupakan tiga spesies yang dapat saling berinteraksi. Kehadiran burung hantu yang merupakan musuh alami tikus dan ular jali akan berpengaruh terhadap keberadaan tikus dan ular jali karena burung hantu akan memangsa tikus dan ular jali, sedangkan kehadiran ular jali juga akan berpengaruh terhadap keberadaan tikus karena ular jali akan memangsa tikus sehingga setiap spesies saling memberikan pengaruh. Dengan demikian, interaksi pada tikus, ular jali, dan burung hantu dapat dirumuskan ke dalam model *predator-prey*.

Model *predator-prey* diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model *predator-prey* sering disebut juga model Lotka-Volterra (Boyce dan Diprima, 2009:534). Interaksi antara tikus, ular sawah, dan burung hantu dapat dirumuskan ke dalam model *predator-prey* dengan tikus sebagai *prey*, sedangkan ular sawah sebagai *predator* sekaligus *prey* dan burung hantu sebagai *predator*. Interaksi antara dua spesies *predator* dengan *prey* ini dapat dirumuskan ke dalam model matematis yang disebut model matematis sistem *predator-prey* dengan dua *predator*. Model matematis sistem *predator-prey* dengan dua *predator* memiliki beberapa parameter, sehingga sistem *predator-prey* dengan dua *predator* memiliki kemungkinan terjadinya perubahan kestabilan titik ekuilibrium (keseimbangan) atau yang sering disebut bifurkasi apabila parameternya divariasikan.

KAJIAN PUSTAKA

Definisi 1 (Anton, 1995 : 277)

Jika A merupakan matriks yang berukuran $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A jika memenuhi persamaan

$$Ax = \lambda x$$

dengan λ adalah suatu skalar (λ ∈ ℝ). Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen (*eigenvector*) yang bersesuaian dengan λ.

Nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$ diperoleh dari $Ax = \lambda x$ atau dapat ditulis sebagai $Ax = I\lambda x$. Persamaan tersebut secara ekuivalen dapat ditulis kembali menjadi

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad (1)$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (1) mempunyai penyelesaian taktrivial jika dan hanya jika

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (2)$$

Persamaan (2) dinamakan persamaan karakteristik dari matriks A.

Definisi 2.6 (Perko, 2001:102)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik ekuilibrium dari sistem $\dot{x} = f(x)$jika $f(\bar{x}) = 0$

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Model Predator-Prey dengan Dua Predator

Populasi prey dipengaruhi oleh tingkat kelahiran, tingkat kematian karena persaingan dengan sesama jenis, dan tingkat kematian karena dimangsa oleh predator jenis I maupun predator jenis II. Populasi predator jenis I dipengaruhi oleh oleh tingkat kematian karena tidak adanya prey, tingkat kematian karena dimangsa oleh predator jenis II, dan bertambah karena adanya prey. Populasi predator jenis II dipengaruhi oleh tingkat kematian karena tidak adanya prey maupun predator jenis I dan bertambah karena adanya prey maupun predator jenis I. Pada model ini populasi dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu satu kelompok prey dan dua kelompok predator. Model predator-prey dengan dua predator ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(r - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(-m_1 + a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \qquad (3)$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(-m_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2)$$

dengan x_1 adalah populasi prey, x_2 adalah populasi predator jenis I, dan x_3 adalah populasi predator jenis II. Diberikan definisi parameter yang digunakan pada sistem (3) pada tabel berikut.

Tabel 1 Definisi Parameter

Parameter	Definisi	Syarat
r	Laju kelahiran *prey* per satuan waktu.	$r > 0$
m_1	Laju kematian alami *predator* jenis I per satuan waktu.	$m_1 > 0$
m_2	Laju kematian alami *predator* jenis II per satuan waktu.	$m_2 > 0$
a_{11}	Parameter interaksi antara *prey* dengan sesama jenisnya per satuan waktu.	$a_{11} > 0$
a_{12}	Parameter interaksi antara *prey* dengan *predator* jenis I per satuan waktu. Interaksi yang dimaksud yaitu *prey* akan dimangsa oleh *predator* jenis I.	$a_{12} > 0$
a_{13}	Parameter interaksi antara *prey* dengan *predator* jenis II per satuan waktu. Interaksi yang dimaksud yaitu *prey* akan dimangsa oleh *predator* jenis II.	$a_{13} > 0$
a_{21}	Parameter interaksi antara *predator* jenis I dengan *prey* per satuan waktu. Interaksi yang dimaksud yaitu *predator* jenis I akan memangsa *prey*.	$a_{21} > 0$
a_{23}	Parameter interaksi antara *predator* jenis I dengan *predator* jenis II per satuan waktu. Interaksi yang dimaksud yaitu *predator* jenis I akan dimangsa oleh *predator* jenis II.	$a_{23} > 0$
a_{31}	Parameter interaksi antara *predator* jenis II dengan *prey* per satuan waktu. Interaksi yang dimaksud yaitu *predator* jenis II akan memangsa *prey*.	$a_{31} > 0$
a_{32}	Parameter interaksi antara *predator* jenis II dengan *predator* jenis I per satuan waktu. Interaksi yang dimaksud yaitu *predator* jenis II akan memangsa *predator* jenis I.	$a_{32} > 0$

B. Sistem dengan Dua Parameter Bebas

Beberapa parameter pada sistem (3) akan dibuat bernilai tetap (*fixed*) sehingga hanya tersisa dua parameter bebas yaitu m_1 dan m_2. Penentuan berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh M. Rafikov, J.M. Balthazar, dan H.F. von Bremen tentang sistem *predator-prey* diberikan nilai-nilai parameter pada tabel berikut.

Tabel 2 Nilai parameter pada sistem (3)
(M. Rafikov et al, 2008:560)

Parameter	Nilai Parameter	Parameter	Nilai Parameter
r	0.17	a_{21}	0.000255
a_{11}	0.00017	a_{23}	0.0017
a_{12}	0.00017	a_{31}	0.00085
a_{13}	0.0017	a_{32}	0.000085

Kemudian akan disubstitusikan nilai parameter-parameter yang bersesuaian pada sistem (3), sehingga diperoleh sistem baru sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(0.17 - 0.00017x_1 - 0.00017x_2 - 0.0017x_3)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(-m_1 + 0.000255x_1 - 0.0017x_3) \qquad (4)$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(-m_2 + 0.00085x_1 + 0.000085x_2)$$

C. Titik Ekuilibrium Model Predator-Prey

Berdasarkan Definisi 2, titik ekuilibrium diperoleh dari $\frac{dx_1}{dt} = 0$, $\frac{dx_2}{dt} = 0$, dan $\frac{dx_3}{dt} = 0$. Ada beberapa kemungkinan titik ekuilibrium berdasarkan keadaan populasinya. Dari model (4) diperoleh lima titik ekuilibrium sebagai berikut.

1. $E_1 = (0,0,0)$, yaitu keadaan dimana populasi prey tidak ada, sehingga populasi *predator* jenis I dan *predator* jenis II akan musnah karena tidak ada makanan.
2. $E_2 = \left(\frac{m_1}{0.000255}, 1000 - \frac{m_1}{0.000255}, 0\right)$ yaitu keadaan dimana populasi *prey* dan *predator* jenis I ada, sementara *predator* jenis II tidak ada.
3. $E_3 = \left(\frac{m_2}{0.00085}, 0{,}100 - \frac{m_2}{0.0085}\right)$ yaitu keadaan dimana populasi *prey* dan *predator* jenis II ada, sementara *predator* jenis I tidak ada.
4. $E_4 = (1000{,}0{,}0)$ yaitu keadaan dimana populasi *prey* ada, sementara *predator* jenis I dan *predator* jenis II tidak ada.
5. $E_5 = \left(\frac{-0.17 - m_1 + 2m_2}{0.001275}, \frac{1.7 + 10m_1 - 5m_2}{0.001275}, \frac{-0.0255 - 0.9m_1 + 0.3m_2}{0.001275}\right)$ yaitu keadaan dimana populasi *prey*, dan *predator* jenis I, dan *predator* jenis II ada.

D. Analisis Kestabilan Model Predator-Prey

Kestabilan pada setiap titik ekuilibrium akan diperiksa sebagai berikut.

1. Kestabilan titik ekuilibrium E_1

Matriks Jacobian model (4) pada E_1 adalah

$$Df(E_1) = \begin{bmatrix} 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari $Df(E_1)$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$\begin{vmatrix} 0.17 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(0.17 - \lambda)(-m_1 - \lambda)(-m_2 - \lambda) = 0$$

dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 0.17,\ \lambda_2 = -m_1,\ \lambda_3 = -m_2$$

Karena r, m_1, m_2 merupakan parameter yang bernilai positif, maka titik E_1 tidak stabil karena $\lambda_1 > 0$.

2. Kestabilan titik ekuilibrium E_2

Matriks Jacobian model (4) pada E_2 adalah

$$Df(\boldsymbol{E_2}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}m_1 & -\frac{2}{3}m_1 & -\frac{20}{3}m_1 \\ 0.255 - m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 + 3m_1 + 0.085 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari $Df(E_2)$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3}m_1 - \lambda & -\frac{2}{3}m_1 & -\frac{20}{3}m_1 \\ 0.255 - m_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 + 3m_1 + 0.085 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(-m_2+3m_1+0.085-\lambda)\left(\lambda^2+\frac{2}{3}\,m_1\lambda+\ 0.17m_1 -\frac{2}{3}(m_1)^2\right)=0$$

dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1=-m_2+3m_1+0.085$$

$$\lambda_{2,3}=-\frac{2}{3}\,m_1\pm\frac{\sqrt{\frac{28}{9}(m_1)^2-0.68m_1}}{2}$$

Titik ekuilibrium E_2 stabil jika semua nilai eigennya bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium E_2 stabil jika $-m_2+3m_1+0.085<0$ dan $m_1<0.218$. Jika $m_1=0.255$ akan didapatkan $\lambda_2=0$ dan $\lambda_3=-0.17$, sedangkan jika $m_1=0.255$ dan $m_2=0.85$ didapatkan $\lambda_1=0$, sehingga dimungkinkan terjadi bifurkasi.

3. Kestabilan titik ekuilibrium E_3

Matriks Jacobian model (4) pada E_3 adalah

$$Df(E_3)=\begin{bmatrix}-0.2\,m_2 & -0.2\,m_2 & -2\,m_2\\ 0 & -m_1+0.1\,m_2-0.17 & 0\\ 0.085-0.1\,m_2 & 0.0085-0.01\,m_2 & 0\end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari $Df(E_3)$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$\begin{vmatrix}-0.2\,m_2-\lambda & -0.2\,m_2 & -2\,m_2\\ 0 & -m_1+0.1\,m_2-0.17-\lambda & 0\\ 0.085-0.1\,m_2 & 0.0085-0.01\,m_2 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(-m_1+0.1\,m_2-0.17-\lambda)(\lambda^2+0.2m_2\lambda+0.17m_2 -0.2(m_2)^2)=0$$

dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1=-m_1+0.1\,m_2-0.17$$

$$\lambda_{2,3}=-0.1m_2\pm\frac{\sqrt{0.84(\,m_2)^2-0.68m_2}}{2}$$

Titik ekuilibrium E_3 stabil jika semua nilai eigennya bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium E_3 stabil jika $-m_1+0.1\,m_2-0.17<0$ dan $m_2<0.8$. Jika $m_2=0.85$ akan didapatkan $\lambda_2=0$ dan $\lambda_3=-0.17$, sedangkan jika $m_1=0.255$ dan $m_2=0.85$ didapatkan $\lambda_1=0$, sehingga dimungkinkan terjadi bifurkasi.

4. Kestabilan titik ekuilibrium E_4

Matriks Jacobian model (4) pada E_4 adalah

$$Df(E_4)=\begin{bmatrix}-0.17 & -0.17 & -1.7\\ 0 & -m_1+0.255 & 0\\ 0 & 0 & -m_2+0.85\end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari $Df(E_4)$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$\begin{vmatrix}-0.17-\lambda & -0.17 & -1.7\\ 0 & -m_1+0.255-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -m_2+0.85-\lambda\end{vmatrix}=0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$(-0.17-\lambda)(-m_1+0.255-\lambda)(-m_2+0.85-\lambda)=0$$

dan diperoleh

$$\lambda_1=-0.17$$

$$\lambda_2=-m_1+0.255$$

$$\lambda_3=-m_2+0.85$$

Titik ekuilibrium E_4 stabil jika semua nilai eigennya bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium E_4 stabil jika $m_1>0.255$ dan $m_2>0.85$. Jika $m_1=0.255$ dan $m_2=0.85$ akan didapat $\lambda_2=0$ dan $\lambda_3=0$, maka dimungkinkan terjadinya bifurkasi.

5. Kestabilan titik ekuilibrium E_5

Matriks Jacobian model (4) pada E_5 adalah

$$Df(E_5)=\begin{bmatrix}-\frac{A}{7.5} & -\frac{A}{7.5} & -\frac{A}{0.75}\\ 0.2B & 0 & -\frac{B}{0.75}\\ 0.2C & \frac{C}{15} & 0\end{bmatrix}$$

dengan $A=-0.17-m_1+2m_2$

$B=1.7+10m_1-5m_2$

$C=-0.0255-0.9m_1+0.3m_2$

Nilai eigen diperoleh dari $|Df(E_5)-\lambda I|=0$, sehingga

$$-\lambda^3-\frac{A}{7.5}\lambda^2-\frac{1}{7.5(0.75)(15)}(22.5AC+BC +2.25AB)\lambda-\frac{1}{7.5(0.75)(15)}ABC =0$$

Persamaan di atas dapat dimisalkan $F_1=\frac{A}{7.5}$, $F_2=\frac{1}{7.5(0.75)(15)}(22.5AC+BC+2.25AB)$, dan

$F_3 = \frac{1}{7.5(0.75)(15)} ABC$ sehingga diperoleh persamaan karakteristik baru sebagai berikut

$$-\lambda^3 - F_1\lambda^2 - F_2\lambda - F_3 = 0$$

Dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz diperoleh

λ^3	-1	$-F_1$
$\boldsymbol{\lambda^2}$	$-F_2$	$-F_3$
$\boldsymbol{\lambda^1}$	$\frac{F_1F_2 - F_3}{-F_1}$	0
$\boldsymbol{\lambda^0}$	$-F_3$	0

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz , titik ekuilibrium E_5 jika pada kolom pertama setiap entrinya bernilai negatif, dengan syarat $F_2 > 0$, $F_3 > 0$, $F_1F_2 - F_3 > 0$. Dengan kata lain, kestabilan sistem pada titik ekuilibrium E_5 tidak dapat ditentukan dengan kriteria Routh-Hurwitz jika ada entri dari kolom pertama tabel Routh-Hurwitz yang bernilai nol, sehingga kestabilan sistem pada titik ekuilibrium E_5 dapat ditentukan dengan kriteria Routh-Hurwitz jika $m_1 \neq 0.255$ dan $m_2 \neq 0.85$.

E. Transformasi Sistem

Untuk melihat kemungkinan terjadinya bifurkasi pada sistem (4) perlu dilakukan transformasi pada sistem tersebut guna mendapatkan bentuk sistem yang lebih sederhana.

a. Translasi Parameter

Misalkan $x = x_1 - x_1^*$, $y = x_2 - x_2^*$, $z = x_3 - x_3^*$, $\mu_1 = m_1 - 0.255$, dan $\mu_2 = m_2 - 0.85$ dengan $x_1^* = 1000$, $x_2^* = 0$, dan $x_3^* = 0$ dengan $x_1^* = 1000$ maka $x_1 = x + 1000$

Substitusikan bentuk x, y, z, μ_1, dan μ_2 ke sistem (4) sehingga diperoleh sistem baru, yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(-0.00017x - 0.00017y - 0.0017z) - 0.17(x + y + 10z) \\ \dot{y} &= y(-\mu_1 + 0.000255x - 0.0017z) \\ \dot{z} &= z(-\mu_2 + 0.00085x - 0.000085y) \end{aligned} \qquad (\mathbf{5})$$

b. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Saat Bifurkasi

Matriks Jacobian sistem (5) adalah

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} P & -0.00017x - 0.17 & -0.0017x - 1.7 \\ 0.000255y & Q & 0.0017y \\ 0.00085z & 0.000085z & R \end{bmatrix}$$

dengan

$P = -0.00034x - 0.00017y - 0.0017z - 0.17$

$Q = -\mu_1 + 0.000255x - 0.0017z$

$R = -\mu_2 + 0.00085x - 0.000085y$

Linearisasi di titik (0,0,0) untuk $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 = 0$ didapat

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.17 & -0.17 & -1.7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Sistem (5) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 & -0.17 & -1.7 \\ 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(-0.00017x - 0.00017y - 0.0017z) \\ y(-\mu_1 + 0.000255x - 0.0017z) \\ z(-\mu_2 + 0.00085x - 0.000085y) \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{7})$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks A_1

Nilai eigen diperoleh dari $|A_1 - \lambda I| = 0$, sehingga

$$(-0.17 - \lambda)(-\lambda)(-\lambda) = 0$$

dan diperoleh $\lambda_1 = -0.17$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = 0$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1, λ_2, dan λ_3 berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ dan } \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c. Pendefinisian Variabel Baru

Berdasarkan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1, λ_2, dan λ_3 dibentuk matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks P adalah

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Akan dicari $P^{-1}A_1P$

$$P^{-1}A_1P = \begin{bmatrix} -0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Matriks P dapat didefinisikan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} x &= u_1 - u_2 - 10u_3 \\ y &= u_2 \qquad\qquad (10) \\ z &= u_3 \end{aligned}$$

Persamaan (10) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \\ \dot{u_3} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Substitusikan persamaan (10) dan (11) ke persamaan (7) menghasilkan

$$\dot{U} = P^{-1} A_1 P U$$
$$+P^{-1} \begin{bmatrix} (u_1 - u_2 - 10u_3)(-0.00017u_1) \\ u_2(-\mu_1 + 0.000255u_1 - 0.000255u_2 - 0.00425u_3) \\ u_3(-\mu_2 + 0.00085u_1 - 0.000935u_2 - 0.0085u_3) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Substitusikan (6) dan (7) ke persamaan (10) menghasilkan

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \\ \dot{u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U$$
$$+ \begin{bmatrix} a \\ u_2(-\mu_1 + 0.000255u_1 - 0.000255u_2 - 0.00425u_3) \\ u_3(-\mu_2 + 0.00085u_1 - 0.000935u_2 - 0.0085u_3) \end{bmatrix} \quad (\mathbf{11})$$

dengan

$$\begin{aligned} a = (u_1 - u_2 - 10u_3)(-0.00017u_1) + u_2(-\mu_1 \\ + 0.000255u_1 - 0.000255u_2 \\ - 0.00425u_3) + 10u_3(-\mu_2 + 0.00085u_1 \\ - 0.000935u_2 - 0.0085u_3) \end{aligned}$$

d. Persamaan *Center Manifold* dan Hasil Transformasi

Kestabilan suatu sistem yang memiliki nilai eigen dengan bagian real nol tidak dapat ditentukan melalui sistem hasil linearisasinya. Oleh karena itu, untuk menentukan kestabilan sistem dengan bagian real nol digunakan teori *center manifold.*

Didefinisikan *center manifold* h sebagai

$$\begin{aligned} h = -0.0015x^2 - 0.5y^2 - 0.08xy - 5.882352941x\mu_1 \\ - 58.82352941y\mu_2 \end{aligned}$$

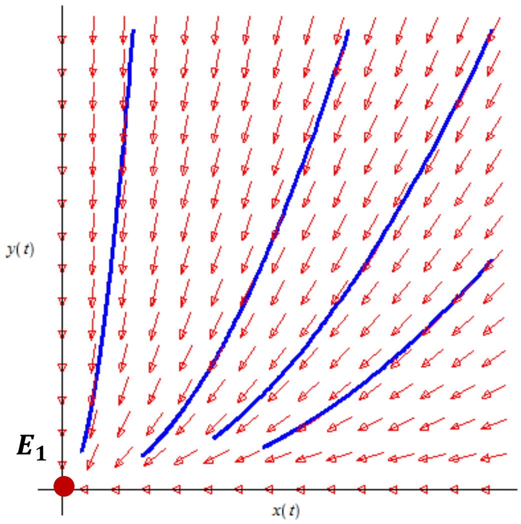
Substitusikan persamaan *center manifold* h ke persamaan (11) kemudian dimisalkan $u_2 = x$ dan $u_3 = y$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x} = x(-\mu_1 - 3.825 \times 10^{-7}x^2 - 0.0001275y^2 \\ - 0.0000204xy - 0.0015x\mu_1 \\ - 0.015y\mu_2 - 0.000255x \\ - 0.00425y) \qquad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = y(-\mu_2 - 0.000001275x^2 - 0.00425y^2 - 0.000068xy \\ - 0.005x\mu_1 - 0.05y\mu_2 - 0.000935x \\ - 0.0085y) \qquad (12b) \end{aligned}$$

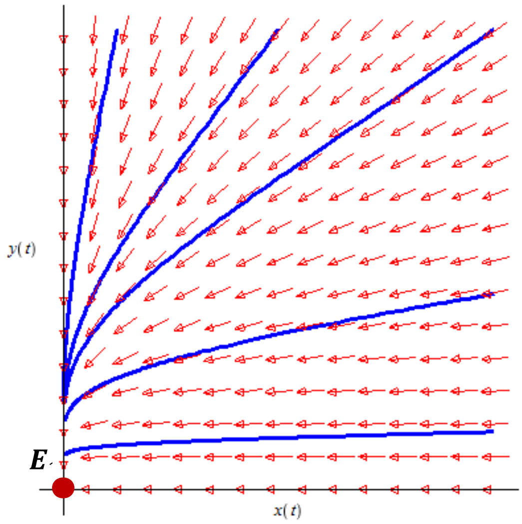
e. Potret Fase Hasil Transformasi Sistem

Dengan menggunakan Maple 15, digambarkan potret fase sistem (12) sebagai berikut.



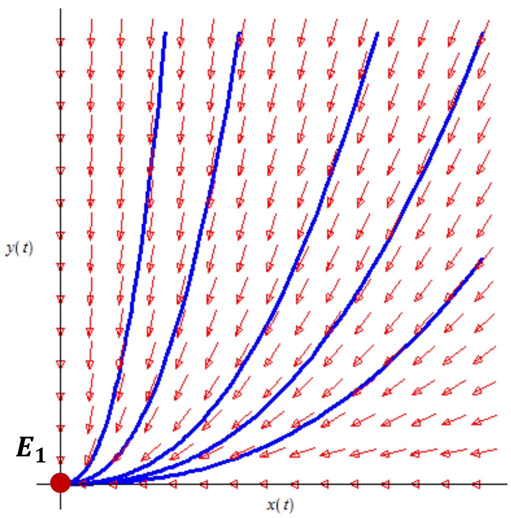
Gambar 3.1 Potret fase pada $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 = 0$

Untuk $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 = 0$ terdapat satu titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$. Pada gambar 3.1 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal di sekitar E_1 solusi akan menuju titik ekuilibrium $E_1(0,0)$, sehingga titik E_1 stabil asimtotik, artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 255 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 850 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis I dan jenis II menuju kepunahan.



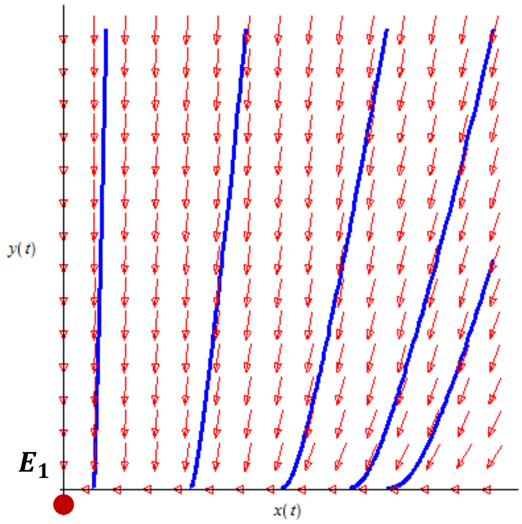
Gambar 3.2 Potret fase pada $\mu_1 = 0.02$ dan $\mu_2 = 0$

Untuk $\mu_1 > 0$ dan $\mu_2 = 0$ terdapat satu titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$. Pada gambar 3.2 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal di sekitar E_1 solusi akan menuju titik $E_1(0,0)$, sehingga titik E_1 stabil asimtotik, artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 275 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 850, akan menyebabkan jumlah *predator* jenis I dan jenis II akan menuju kepunahan.



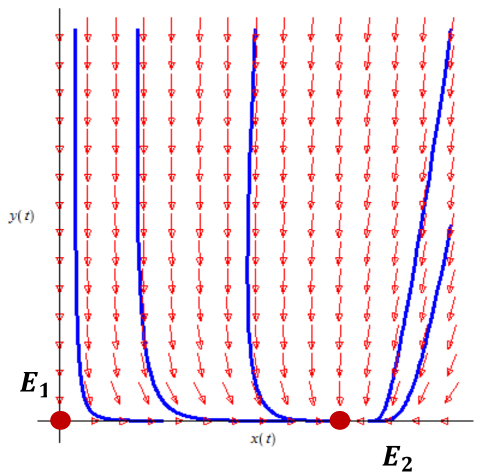
Gambar 3.3 Potret fase pada $\mu_1 = 0.02$ dan $\mu_2 = 0.05$

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa untuk $\mu_1, \mu_2 > 0$ hanya terdapat satu titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$. Titik $E_1(0,0)$ stabil asimtotik karena setiap diambil nilai awal di sekitar E_1 solusi akan menuju titik ekuilibrium, artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 275 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 900 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis I dan jenis II menuju kepunahan.



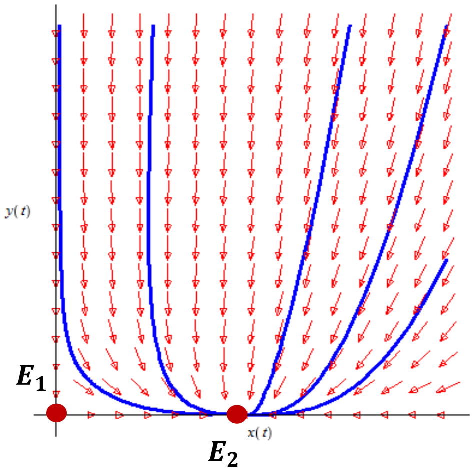
Gambar 3.4 Potret fase pada $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 = 0.02$

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa untuk $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 > 0$ hanya terdapat satu titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$. Titik $E_1(0,0)$ stabil asimtotik karena setiap diambil nilai awal di sekitar E_1 solusi akan menuju titik ekuilibrium, artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 255 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 870 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis I dan jenis II menuju kepunahan.



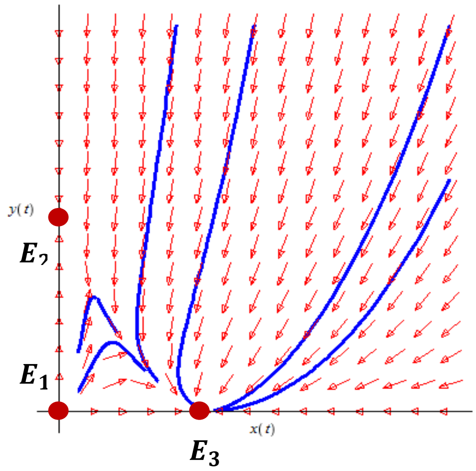
Gambar 3.5 Potret fase pada $\mu_1 = -0.01$ dan $\mu_2 = 0.03$

Untuk $\mu_1 < 0$ dan $\mu_2 > 0$ terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ dan $E_2(39.21,0)$. Pada gambar 3.5 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi akan mendekati E_2 dan menjauhi E_1, sehingga titik ekuilibrium $E_1(0,0)$ tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium $E_2(39.21,0)$ stabil asimtotik. Artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 245 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 880 akan menyebabkan jumlah jenis II menuju kepunahan sedangkan jumlah *predator* jenis I akan menuju ke $39.21m$, dimana m adalah tingkat pertumbuhan maksimum.



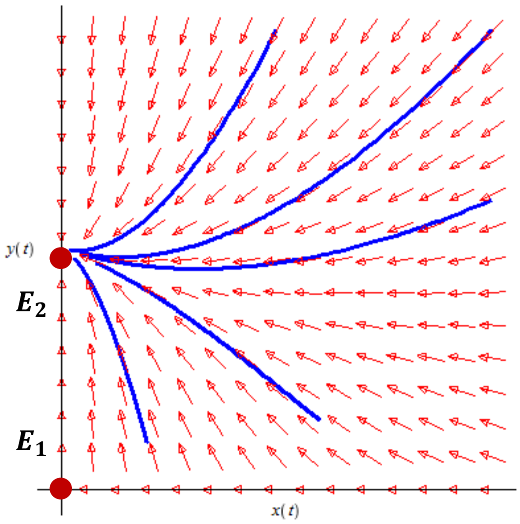
Gambar 3.6 Potret fase pada $\mu_1 = -0.025$ dan $\mu_2 = 0$

Untuk $\mu_1 < 0$ dan $\mu_2 = 0$ terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ dan $E_2(98.04,0)$. Pada gambar 3.6 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi akan mendekati E_2 dan menjauhi E_1, sehingga titik ekuilibrium $E_1(0,0)$ tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium $E_2(98.04,0)$ stabil asimtotik. Artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 230 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 850 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis II menuju kepunahan sedangkan jumlah *predator* jenis I akan menuju ke $98.04m$, dimana m adalah tingkat pertumbuhan maksimum.



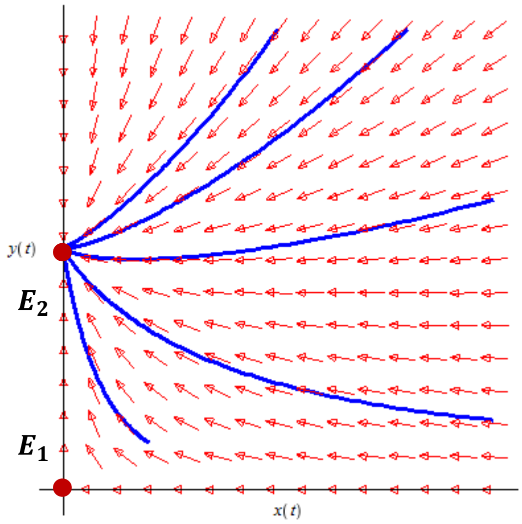
Gambar 3.7 Potret fase pada $\mu_1 = -0.01$ dan $\mu_2 = -0.02$

Untuk $\mu_1 < 0$ dan $\mu_2 < 0$ terdapat tiga titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$, $E_2(0,2.35)$, dan $E_3(39.21,0)$. Pada gambar 3.7 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi akan mendekati E_3, sehingga titik ekuilibrium $E_1(0,0)$ dan $E_2(0,2.35)$ tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium $E_3(39.21,0)$ stabil asimtotik. Artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 245 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 830 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis II menuju kepunahan, sedangkan jumlah *predator* jenis I akan menuju ke 39.21, dimana m adalah tingkat pertumbuhan maksimum.



Gambar 3.8 Potret fase pada $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 = -0.02$

Untuk $\mu_1 = 0$ dan $\mu_2 < 0$ terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ dan $E_2(0,2.35)$. Pada gambar 3.8 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi akan mendekati E_2 dan menjauhi E_1, sehingga titik ekuilibrium $E_1(0,0)$ tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium $E_2(0,2.35)$ stabil asimtotik. Artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 255 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 830 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis I menuju kepunahan, sedangkan jumlah *predator* jenis II menuju ke $2.35m$, dimana m adalah tingkat pertumbuhan maksimum.



Gambar 3.9 Potret fase pada $\mu_1 = 0.01$ dan $\mu_2 = -0.02$

Untuk $\mu_1 < 0$ dan $\mu_2 = 0$ terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ dan $E_2(0,2.35)$. Pada gambar 3.9 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi akan mendekati E_2 dan menjauhi E_1, sehingga titik ekuilibrium $E_1(0,0)$ tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium $E_2(0,2.35)$ stabil asimtotik. Artinya setiap 1000 *predator* jenis I terdapat kematian sebanyak 255 dan setiap 1000 *predator* jenis II terdapat kematian sebanyak 830 akan menyebabkan jumlah *predator* jenis I menuju kepunahan, sedangkan jumlah *predator* jenis II menuju ke $2.35m$, dimana m adalah tingkat pertumbuhan maksimum.

Berdasarkan potret fase tersebut di atas, kemudian diberikan tabel titik ekuilibrium dan kestabilan masing-masing titik ekuilibrium sistem (12) sebagai berikut.

Tabel 2 Titik Ekulibrium Sistem (12) dan Kestabilannya

	$\mu_2 < 0$	$\mu_2 = 0$	$\mu_2 > 0$
$\mu_1 < 0$	Ada tiga titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ dan $E_2(0,2.35)$ tidak stabil, sedangkan $E_3(39.21,0)$ stabil asimtotik.	Ada dua titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ tidak stabil, dan $E_2(98.04,0)$ stabil asimtotik	Ada dua titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ tidak stabil, dan $E_2(39.21,0)$ stabil asimtotik.
$\mu_1 = 0$	Ada dua titik ekuilibrium, yaitu $E_1(0,0)$ tidak stabil, dan $E_2(0,2.35)$ stabil.	Ada satu titik ekuilibrium yang stabil asimtotik, yaitu $E_1(0,0)$.	Ada satu titik ekuilibrium yang stabil asimtotik, yaitu $E_1(0,0)$.
$\mu_1 > 0$	Ada dua titik ekuilibrium $E_1(0,0)$ tidak stabil, dan $E_2(0,2.35)$ stabil asimtotik.	Ada satu titik ekuilibrium yang stabil asimtotik, yaitu $E_1(0,0)$.	Ada satu titik ekuilibrium yang stabil asimtotik, yaitu $E_1(0,0)$.

Berdasarkan Tabel 2 dan analisis secara numerik dengan melihat potret fase , bifurkasi yang terjadi sistem (12) yaitu adanya perubahan banyaknya titik ekuilibrium dan perubahan kestabilan titik ekuilibrium. Bifurkasi yang terjadi tidak dapat ditentukan nama bifurkasinya karena perilaku sistem (12) tidak sama dengan perilaku sistem yang mengalami bifurkasi saddle-nodes, transkritikal, pitchfork, maupun bifurkasi hopf.

Bifurkasi saddle-nodes terjadi jika untuk nilai parameter tertentu sistem tidak mempunyai titik ekuilibrium sedangkan untuk nilai parameter yang lain terdapat dua titik ekuilibrium dimana satu titik ekuilibrium stabil dan titik ekuilibrium yang lain tidak stabil, sehingga bifurkasi yang terjadi pada sistem (12) jika salah satu parameternya divariasikan bukan merupakan bifurkasi saddle-nodes karena berdasarkan Tabel 2 sistem selalu memiliki titik ekuilibrium untuk setiap nilai parameter.

Kemudian bifurkasi transkritikal terjadi jika terdapat pertukaran kestabilan, yaitu dari titik ekuilibrium stabil menjadi titik ekuilibrium tidak stabil dan sebaliknya, sehingga bifurkasi yang terjadi pada sistem (12) jika salah satu parameternya divariasikan bukan merupakan bifurkasi transkritikal karena berdasarkan Tabel 2 tidak terdapat pertukaran kestabilan pada sistem.

Bifurkasi pitchfork dibagi menjadi dua, yaitu: bifurkasi pitchfork superkritical dan bifurkasi pitchfork subkritical. Bifurkasi pitchfork superkritical terjadi jika satu titik tetap stabil berubah menjadi dua titik tetap stabil dan satu titik tetap tak stabil, dan bifurkasi pitchfork subkritical terjadi jika satu titik tetap stabil dan dua titik tetap tak-stabil berubah menjadi satu titik tetap tak-stabil. Dengan kata lain, bifurkasi yang terjadi pada sistem (12) jika salah satu parameternya divariasikan bukan merupakan bifurkasi pitchfork karena berdasarkan Tabel 2 untuk nilai parameter tertentu sistem memiliki dua titik ekuilibrium tidak stabil dan satu titik ekuilibrium stabil berubah menjadi satu titik ekuilibrium stabil dan satu titik ekuilibrium tidak stabil.

Bifurkasi hopf terjadi jika terdapat orbit periodik pada strutur orbitnya, sehingga bifurkasi yang terjadi pada sistem (12) jika salah satu parameternya divariasikan bukan merupakan bifurkasi hopf karena berdasarkan potret fase tidak terdapat orbit periodik.

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model matematis *predator-prey* dengan dua *predator* mempunyai lima titik ekuilibrium dimana keberadaan tiga di antaranya bergantung pada laju kematian kedua jenis *predator*, sedangkan dua titik ekuilibrium yang lain tidak bergantung pada laju kematian kedua jenis *predator*.
2. Bifurkasi yang terjadi pada model matematis *predator-prey* dengan dua *predator* ditandai adanya perubahan banyaknya titik ekuilibrium dan perubahan kestabilan titik ekuilibrium, namun tidak dapat ditentukan nama bifurkasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (1995). *Aljabar Linear Elementer*. 5th Edition. (Alih bahasa: Pantur Silaban, Ph.D). Jakarta: Erlangga.

Boyce, William E. & Diprima, Richard C. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 9th Edition. USA:John Wiley & Sons

Perko, Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd Edition. New York: Springer-Verlag.

Rafikov, M., Balthazar, J.M., dan von Bremen, H.F. Mathematical Modeling and Control of Population System: Application in Biological Pest Control. *Applied Mathematics and Computation (Nomor 200 tahun 2008)* Hlm. 557-573