

APLIKASI MODEL SUKU BUNGA STOKASTIK BLACK-DERMAN-TOY DENGAN FORWARD INDUCTION DALAM PENGHITUNGAN ANUITAS

APPLICATION OF BLACK-DERMAN-TOY STOCHASTIC INTEREST RATE WITH FORWARD-INDUCTION IN ANNUITY VALUATION

Oleh:

Chandra Nugroho Erlangga¹ Rosita Kusumawati²

Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

chandra.n.erlangga@gmail.com¹ rosita.kusumawati@gmail.com²

Abstrak

Penghitungan nilai anuitas sering dilakukan dengan suku bunga konstan (deterministik), pada kenyataannya suku bunga berubah-ubah sesuai dengan waktu (stokastik). Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan model suku bunga stokastik dalam penghitungan anuitas. Model suku bunga stokastik yang digunakan adalah model Black-Derman-Toy yang diselesaikan dengan metode *forward-induction* untuk memodelkan kemungkinan-kemungkinan suku bunga sesaat. Data yang digunakan adalah data imbal hasil harian obligasi tanpa kupon *United States Treasury Zero Coupon Yield Rate* tahun 2010. Suku bunga sesaat yang diperoleh digunakan untuk menghitung nilai sekarang dan nilai masa depan anuitas. Nilai sekarang dan nilai masa depan tersebut dibandingkan dengan nilai sekarang dan nilai masa depan yang dihitung menggunakan suku bunga aktual untuk tahun 2010-2014 dan menghasilkan nilai MAPE dan MSE sebesar 1,2147% dan 0,004358 untuk nilai sekarang anuitas serta MAPE sebesar 1,3655% dan MSE sebesar 0,007974 untuk nilai masa depan anuitas.

Kata kunci: Black-Derman-Toy, suku bunga stokastik, anuitas, *forward-induction*

Abstract

Annuity valuation often uses constant interest rate (deterministic) rather than time-dependent evolving interest rate (stochastic). The aim of this study is applying stochastic interest rate model into annuity valuation. Black-Derman-Toy model as the stochastic interest rate model is used and solved using forward-induction method to make model for short-rate possibilities up to fifth year from zero-coupon bond yield rate from different maturities. Used data was 2010 United States Treasury Zero-Coupon Yield Rate. Obtained short rates were used to calculate present values and future values of annuity-immediate. Those present values and future values are then compared to present values and future values calculated using real interest rates for year 2010-2014 and results MAPE and MSE values of 1,2147% and 0,004358 respectively for the present value and MAPE of 1,3655% and MSE of 0,007974 for future value.

Keywords: Black-Derman-Toy, stochastic interest rate, annuity, forward-induction

PENDAHULUAN

Anuitas menurut Kellison (1991) adalah suatu rangkaian pembayaran yang dilakukan pada interval waktu yang sama. Anuitas digunakan sebagai dasar penilaian berbagai instrumen keuangan. Contoh instrumen keuangan yang menggunakan anuitas sebagai dasar penilaiannya adalah: obligasi, kredit barang, peminjaman modal, asuransi, dana pensiun dan lain sebagainya.

Variabel utama dalam penghitungan anuitas adalah tingkat suku bunga.

Tingkat suku bunga merupakan besar suku bunga bebas risiko yang diterbitkan oleh bank sentral. Biasanya suku bunga ini dapat dilihat dari suku bunga deposito satu tahun atau suku bunga yang digunakan untuk mendiskon harga obligasi tanpa kupon dengan waktu jatuh tempo satu tahun. Oleh karena itu tingkat suku bunga selalu berubah-

ubah dan perubahannya dipengaruhi oleh banyak faktor. Pergerakan tingkat suku bunga sangat cepat sehingga pelaporannya dilakukan setiap hari.

Meskipun tingkat suku bunga berubah-ubah setiap saat, anuitas dengan model suku bunga tetap (deterministik) masih banyak dipakai dalam praktik sehari-hari karena penghitungannya yang mudah. Hal ini tentu memuat risiko karena perubahan tingkat suku bunga pasti terjadi. Oleh karena itu perlu dikembangkan suatu metode penghitungan anuitas menggunakan tingkat suku bunga yang berubah-ubah (stokastik).

Perubahan tingkat suku bunga dapat dimodelkan menjadi suatu model yang dinamakan model suku bunga stokastik. Hingga tahun 1990-an telah banyak diperkenalkan model suku bunga stokastik baik dengan pendekatan waktu kontinu maupun waktu diskrit. Salah satu model suku bunga stokastik yang terkenal adalah model Black-Derman-Toy (BDT) yang disusun oleh Black dkk pada tahun 1990.

Model BDT adalah model suku bunga stokastik waktu diskrit yang memodelkan suku bunga yang hanya berlaku selama jangka pendek, atau disebut suku bunga sesaat (Black dkk, 1990). Suku bunga sesaat tersebut tersusun dalam pohon binomial yang dapat menggambarkan berbagai kemungkinan naik dan turun tingkat suku bunga, yang disebut sebagai pohon suku bunga sesaat. Untuk menghitung suku bunga sesaat, model BDT memanfaatkan tingkat imbal hasil obligasi tanpa kupon dari berbagai waktu jatuh tempo.

Haerini (2013) memanfaatkan model BDT yang dipecahkan menggunakan persamaan diferensial stokastik untuk menghitung harga obligasi *callable*. Qoyyimi (2008) dalam tesisnya

berhasil menerapkan model BDT ke dalam penghitungan premi asuransi berjangka dan asuransi dwiguna. Qoyyimi menggunakan suatu teknik bernama *forward-induction* yang diperkenalkan Panjer dkk (1998) untuk memecahkan model BDT. Teknik ini tidak memerlukan pengetahuan mengenai persamaan diferensial dan menggunakan harga obligasi pada beberapa titik waktu untuk menerka tingkat suku bunga sesaat.

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas penerapan model BDT dengan *forward-induction* ke dalam penghitungan anuitas.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan meliputi beberapa tahap di antaranya: pengumpulan data, analisis data, dan penarikan kesimpulan.

Teknik Pengumpulan Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data sekunder yang digunakan adalah data imbal hasil obligasi tanpa kupon *United States Treasury Zero Coupon Yield Rate* tahun 2010 sebagai data utama untuk membangun model BDT, yang diperoleh melalui www.quandl.com. Selain itu, data lain yang digunakan adalah data tingkat suku bunga Amerika Serikat tahun 2010 hingga 2014 yang diperoleh dari data.worldbank.com seperti tercantum pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1. Tingkat Suku Bunga AS per tahun 2010-2014

2010	2011	2012	2013	2014
2.00%	1.16%	1.43%	1.73%	1.77%

Teknik Analisis Data

Langkah-langkah yang ditempuh untuk membangun suku bunga sesaat model Black-Derman-Toy dengan metode *forward-induction* untuk t tahun adalah sebagai berikut:

1. Data tingkat imbal hasil harian obligasi tanpa kupon untuk waktu jatuh tempo 1 sampai t tahun dicari reratanya untuk tiap waktu jatuh tempo sebagai tingkat imbal hasil tahunan $(y(0,0,t))$. Kemudian dicari volatilitas imbal hasil $(\sigma_y(t))$, yaitu simpangan baku dari logaritma natural seluruh imbal hasil harian di tiap waktu jatuh tempo.
2. Terlebih dahulu diasumsikan bahwa peluang naik dan turun suku bunga sesaat mengikuti ukuran martingale, dan peluang naik dinotasikan $q(t,l) = 0,5$. Rerata tingkat imbal hasil dan volatilitas imbal hasil digunakan untuk membangun model BDT dalam 3 langkah yang dirangkum sebagai teknik *forward-induction* dengan mencari $r(t,l)$, yaitu kemungkinan ke- l dari suku bunga sesaat yang berlaku di antara waktu ke- t dan waktu ke- $t + 1$, untuk $t = 0,1,2,3,4, \dots$ dan $l = 0,1 \dots t$. Pertama, menetapkan $y(0,0,1)$ sebagai $r(0,0)$ kemudian mencari harapan harga obligasi yang disebut harga *Arrow-Debreu* menggunakan rumus berikut:

$$A(m-1, i, m, j) = \begin{cases} \frac{1}{2[1+r(m-1, j)]}, i = j \\ \frac{1}{2[1+r(m-1, j-1)]}, i = j-1 \\ 0, \text{ untuk yang lain} \end{cases} \quad (1)$$

dan

$$A(n, i, m+1, j) = \begin{cases} \frac{A(n, i, m, j)}{2(1+r(m, j))}, j = 0 \\ \frac{A(n, i, m, j) + A(n, i, m, j-1)}{2(1+r(m, j)) + 2(1+r(m, j-1))}, j = 1, 2, \dots, m \\ \frac{A(n, i, m, j-1)}{2(1+r(m, j-1))}, j = m+1 \end{cases} \quad (2)$$

untuk $A(0,0,1,0)$ dan $A(0,0,1,1)$. Kedua, memecahkan sistem persamaan berikut

$$r(1,1) = e^{2\sigma_y(2)}r(1,0) \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{1+y(0,0,2)}\right)^2 = \frac{A(0,0,1,0)}{1+r(1,0)} + \frac{A(0,0,1,1)}{1+r(1,1)} \quad (4)$$

untuk mendapatkan $r(1,0)$ dan $r(1,1)$ kemudian mencari nilai $A(0,0,t,j)$ untuk $j = 0,1,2, \dots, t$ dan nilai $A(1,i,t,j)$ untuk $i = 0,1$ dan $j = 0,1,2, \dots, t$ dengan (1) dan (2).

Ketiga, memecahkan sistem persamaan

$$\left(\frac{1}{1+y(0,0,t+1)}\right)^{t+1} = \sum_{j=0}^t \frac{A(0,0,t,j)}{(\sigma(t))^j} r(t,0) \quad (5)$$

$$\left(\sum_{j=1}^t \frac{A(1,1,t,j)}{1+r(t,0)(\sigma(t))^j}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\sum_{j=0}^{t-1} \frac{A(1,0,t,j)}{1+r(t,0)(\sigma(t))^j}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 e^{2\sigma_y(t+1)} \quad (6)$$

untuk $r(t,0)$ dan $\sigma(t)$. Kemudian untuk $r(t,1), r(t,2)$ hingga $r(t,l)$ dapat dicari dengan persamaan berikut

$$r(t,l) = \sigma(t)r(t,l-1) \quad (7)$$

Selanjutnya dicari harga $A(n,i,m,j)$ yang bersesuaian menggunakan (1) dan (2). Setelah pohon suku bunga sesaat terbentuk, akan diperoleh 2^t lintasan suku bunga sesaat.

Suku bunga sesaat yang diperoleh di langkah 2 kemudian digunakan untuk mencari nilai sekarang dan nilai masa depan anuitas akhir dengan suku bunga stokastik yang dirumuskan demikian

$$a_{\overline{n}|}^* = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=0}^j (1+r(i))^{-1} \quad (8)$$

$$s_{\overline{n}|}^* = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + r(i)) \tag{9}$$

kemudian menghitung nilai sekarang dan nilai masa depan anuitas dari data tingkat suku bunga aktual menggunakan (8) dan (9). Kedua nilai anuitas dari masing-masing suku bunga dibandingkan dengan mencari selisihnya dan dihitung nilai MAPE dan MSE (Hanke & Wichern, 2005) untuk tahun ke-5 atau $t = 4$.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Data tingkat imbal hasil harian obligasi tanpa kupon *United States Treasury Zero Coupon Yield Rate* tahun 2010 diolah dengan cara menghitung rerata dan volatilitas imbal hasil harian di waktu jatuh tempo 1-5 tahun yang tercantum dalam Tabel 2.

Tabel 2. Rerata dan Volatilitas Imbal Hasil

t	1	2	3	4	5
$y(0,0,t)$	0.356%	0.688%	1.109%	1.550%	1.974%
$\sigma_y(t)$	20,02%	36,25%	33,96%	29,53%	25,65%

Pohon suku bunga sesaat model BDT yang berhasil dibangun dengan data tingkat imbal hasil harian obligasi tanpa kupon *United States Treasury Zero Coupon Yield Rate* tahun 2010 untuk waktu jatuh tempo 1-5 tahun:

Tabel 3. Pohon Suku Bunga Sesaat I

l	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
0	0.36%	0.77%	1.29%	2.05%	2.80%
1		1.59%	2.56%	3.36%	3.99%
2			5.07%	5.50%	5.69%
3				9.03%	8.10%
4					11.55%

Pohon suku bunga sesaat yang dihasilkan ternyata tidak memenuhi kriteria yang dikemukakan Qoyyimi (2008) dan Black (1990), yaitu setiap suku bunga sesaat harus memiliki kemungkinan

naik dan turun. Dapat dilihat pada $r(0,1)$ yang seharusnya $r(0,1) < r(0,0)$, tetapi malah memiliki nilai yang lebih tinggi dibandingkan $r(0,0)$. Hal ini kemudian diatasi dengan meniru pembangunan model BDT oleh Gaillardetz (2008) yaitu menggunakan satu rerata tingkat imbal hasil tahunan dan satu volatilitas imbal hasil. Rerata tingkat imbal hasil yang dipilih adalah rerata dari $y(0,0,t)$ untuk $t = 1,2,3,4,5$ sebesar 1,13562% dan volatilitas imbal hasil yang dipilih adalah rerata dari $\sigma_y(t)$ untuk $t = 1,2,3,4,5$ sebesar 29,0818%. Pohon suku bunga sesaat yang baru kemudian dibentuk menggunakan satu rerata tingkat imbal hasil dan satu volatilitas imbal hasil, hasilnya sebagai berikut:

Tabel 4. Pohon suku bunga sesaat II

l	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
0	1.14%	0.85%	0.66%	0.52%	0.41%
1		1.52%	1.20%	0.97%	0.80%
2			2.17%	1.80%	1.56%
3				3.36%	3.03%
4					5.88%

Pohon suku bunga sesaat di atas memenuhi kriteria pohon suku bunga sesaat model BDT yang baik.

Adapun nilai sekarang yang diperoleh menggunakan 16 lintasan suku bunga sesaat pada Tabel 5 adalah sebagai berikut:

Tabel 5. Nilai Anuitas Stokastik tahun 2014

Lintasan	Nilai Sekarang	Nilai Masa Depan
t(0,0,0,0,0)	4.87712	5.05411
t(0,0,0,0,1)	4.87340	5.06980
t(0,0,0,1,1)	4.86483	5.08346
t(0,0,0,1,2)	4.84744	5.10326
t(0,0,1,1,1)	4.84949	5.09442
t(0,0,1,1,2)	4.84241	5.12511
t(0,0,1,2,2)	4.82679	5.15083
t(0,0,1,2,3)	4.81343	5.21088
t(0,1,1,1,1)	4.82395	5.10134
t(0,1,1,1,2)	4.81692	5.13208
t(0,1,1,2,2)	4.80139	5.15786
t(0,1,1,2,3)	4.78812	5.21801
t(0,1,2,2,2)	4.77441	5.17809
t(0,1,2,2,3)	4.76127	5.23853
t(0,1,2,3,3)	4.73350	5.28754
t(0,1,2,3,4)	4.70935	5.40641

Nilai sekarang anuitas untuk suku bunga aktual pada tabel 1, setelah dihitung dengan persamaan (8), menghasilkan nilai sebesar 4.766914. Kemudian dicari MAPE dan MSE menggunakan selisih dari nilai sekarang pada tabel 5 dan nilai sekarang untuk suku bunga aktual. Diperoleh nilai MAPE sebesar 1,2147% dan MSE sebesar 0,004358.

Kemudian dihitung nilai masa depan anuitas untuk suku bunga aktual menggunakan persamaan (9), dan diperoleh nilai sebesar 5.14384. MAPE dan MSE dihitung dengan selisih dari nilai masa depan pada tabel 5 dan nilai masa depan anuitas untuk suku bunga aktual. Hasilnya adalah MAPE sebesar 1,3655% dan MSE sebesar 0,007974.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Penerapan model BDT dalam penghitungan anuitas adalah dihasilkannya suatu model prediksi yang menghasilkan berbagai lintasan suku bunga sesaat yang mungkin terjadi di

masa depan. Suku bunga sesaat kemudian digunakan untuk menghitung nilai masa depan dan nilai sekarang anuitas untuk dibandingkan dengan nilai masa depan dan nilai sekarang anuitas menggunakan suku bunga aktual. Hasil perbandingan ini diwakili oleh MAPE dan MSE sebesar 1,2147% dan 0,004358 untuk nilai sekarang anuitas serta MAPE sebesar 1,3655% dan MSE sebesar 0,007974 untuk nilai masa depan anuitas.

Saran

Saran yang dapat penulis berikan kepada pembaca yang akan melanjutkan penelitian ini adalah menggunakan model suku bunga stokastik lain dalam membangun kemungkinan tingkat suku bunga. Selain itu dapat juga digunakan model BDT dengan teknik persamaan diferensial, atau memilih suatu jenis anuitas yang lebih spesifik.

DAFTAR PUSTAKA

Black, Fischer, Derman, Emanuel & Toy, William. (1990). A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, 46 (1), 33-39.

Gaillardetz, Patrice. (2008). Valuation of Life Insurance Products Under Stochastic Interest Rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 212-226.

Helida Haerini. (2013). Penentuan Harga Obligasi Callable dengan Suku Bunga Black Derman Toy Menggunakan Pohon Binomial. *Skripsi*, tidak dipublikasikan. Universitas Gadjah Mada.

Hanke, John E. & Wichern, Dean. W. (2005). *Business Forecasting*. New Jersey: Prentice Hall.

Kellison, Stephen G. (1991). *The Theory of Interest*. Taipei: McGraw-Hill Book Co.

Panjer, Harry H.. (1998). *Financial Economics with Application to Investment, Insurance and Pensions*. Schaumburg: The Actuarial Foundation.

Danang Teguh Qoyyimi. (2008). Valuasi Produk Asuransi Jiwa dengan Suku Bunga

- Stokastik. *Tesis*, tidak dipublikasikan. Universitas Gadjah Mada.
- Quandl. (2015). *US Treasury Zero Coupon Yield Curve*. Diakses tanggal 27 Maret 2016 dari <https://www.quandl.com/data/FED/SVE-NY-US-Treasury-Zero-Coupon-Yield-Curve>.
- Ross, Sheldon M. (1997). *A First Course in Probability*. New Jersey: Prentice Hall.
- World Bank. (2015). *Real Interest Rate Data*. Diakses tanggal 28 Juni 2016 dari <http://data.worldbank.org/indicator/FR.I.NR.RINR>.