

# TINJAUAN KASUS PERSAMAAN PANAS DIMENSI SATU SECARA ANALITIK

## ANALYTICALLY REVIEW ON ONE-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

Oleh: Ahmadi<sup>1)</sup>, Hartono<sup>2)</sup>, Nikenasih Binatari<sup>3)</sup>

Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY

<sup>1)</sup>[12305144019@student.uny.ac.id](mailto:12305144019@student.uny.ac.id), <sup>2)</sup>[hartono@uny.ac.id](mailto:hartono@uny.ac.id), <sup>3)</sup>[nikenasihbinatari@uny.ac.id](mailto:nikenasihbinatari@uny.ac.id)

### Abstrak

Pada paper ini, akan ditinjau kasus persamaan panas dimensi satu dengan nilai awal dan syarat batas berbeda secara analitik. Pada proses pemodelan persamaan panas digunakan hukum termodinamika dengan asumsi batang logam yang menjadi bahan tinjauan adalah batang logam yang homogen. Sehingga diperoleh laju perubahan suhu terhadap waktu sama dengan hasil kali *difusi* termal dengan turunan parsial kedua fungsi atas suhu terhadap posisi. Setelah diperoleh model persamaan panas dimensi satu, kemudian akan diselesaikan persamaan tersebut dengan masalah nilai awal dan syarat batas yang berbeda dengan menggunakan metode separasi variabel. Pertama, untuk syarat batas Dirichlet yaitu suhu di kedua ujung batang logam dipertahankan nol derajat, dengan sumber panas diletakkan tepat di tengah batang logam, diperoleh solusi dalam bentuk deret fungsi sinus kali eksponensial dalam  $t$ . Syarat batas yang kedua adalah Neumann, perubahan suhu di kedua ujung batang logam dipertahankan nol derajat dengan sumber panas diletakkan tepat pada posisi paling kanan dari batang logam, diperoleh solusi dalam bentuk deret fungsi cosinus kali eksponensial dalam  $t$ . Syarat batas yang ketiga adalah Robin, perubahan suhu di ujung yang paling kiri nol derajat dan suhu di ujung yang paling kanan dipertahankan nol derajat dengan sumber panas diletakkan di bawah batang logam tepat pada posisi tengah, solusinya berupa deret fungsi cosinus kali eksponensial dalam  $t$ .

Kata kunci: Persamaan Panas, Syarat Batas *Dirichlet*, *Neumann*, *Robin*.

### Abstract

*This study discussed about some case of heat equation on one-dimensional using initial value and three boundary conditions analytically. The study used the law of thermodynamic that assumed a metal rod in modeling process of heat equation. The metal rod that became this observation was homogeneous. The changing of temperature rate to time that was the result of multiplication of thermal diffusion and the second partial derivatives based on temperature to position. After obtaining the model of one-dimensional heat equation, it was solved by different initial value problems and boundary conditions that using separation variables method. For Dirichlet boundary condition, it resulted the temperature at both ends of the metal rod maintained zero degrees. The heat source was placed in the middle of the metal rod exactly in a certain time before it was turned off at last. In order to obtain a solution in the form of series sine function multiplication exponential at the time in  $t$ . The second boundary conditions or Neumann, the changing temperature of both ends of the metal rod were maintained zero degrees where the heat source was placed at the extreme right position exactly. In order to obtain a solution in the form of series cosine function multiplication exponential at the time in  $t$ . The third boundary condition was Robin, the changing of the temperature at the end of left was zero degrees and the temperature at the end of right was zero degrees where the heat source was placed at the middle of the metal rod exactly. In order to obtain a solution in the form of series cosine function multiplication exponential at the time in  $t$ .*

Keywords: Heat Equation, Boundary Conditions *Dirichlet*, *Neumann*, *Robin*.

## PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial merupakan salah satu topik dalam matematika yang cukup menarik

untuk dikaji lebih lanjut. Hal itu karena banyak permasalahan kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan persamaan Diferensial,

diantaranya dalam bidang kesehatan yaitu pemodelan penyakit, perkembangan bakteri, sedangkan dalam bidang teknik yaitu pemodelan gelombang air laut, pemodelan perambatan panas pada batang logam, dan sistem kerja pada pegas. Persamaan Diferensial secara umum dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan Diferensial biasa dan persamaan Diferensial parsial.

Dalam proses pemodelan matematika banyak ditemukan kasus dalam bentuk Persamaan Diferensial parsial, diantaranya pada pemodelan persamaan panas, persamaan gelombang, persamaan Laplace, dan persamaan telegraf. Peristiwa dalam kehidupan sehari-hari seperti perambatan panas pada kemasan kaleng, perambatan panas pada kabel, sistem kerja pada lemari pendingin merupakan aplikasi dari persamaan panas. Selain itu, contoh perambatan panas pada bidang datar antara lain setrika listrik dan prosesor. Secara umum terdapat tiga cara perpindahan panas, yaitu perpindahan panas secara konduksi, konveksi, dan radiasi.

Masalah persamaan Diferensial parsial dapat diselesaikan dengan menggunakan metode kanonik, metode separasi variabel, metode *D'Alembert*, Metode Transformasi Laplace. Metode separasi variabel adalah suatu metode yang digunakan untuk mentransformasikan suatu persamaan Diferensial parsial kedalam persamaan Diferensial biasa dengan cara memisahkan solusi persamaan diferensial parsial menjadi fungsi-fungsi yang memuat satu variabel. Setelah diperoleh persamaan Diferensial biasa, kemudian selesaikan dengan integral biasa. Berdasarkan langkah tersebut diperoleh solusi dari persamaan Diferensial parsial. Untuk memperoleh solusi khusus, diperlukan adanya nilai awal dan syarat

batas. Apabila yang menjadi bahan tinjauan adalah potongan batang logam, dengan mengambil permisalan  $u(x, 0)$  yang menyatakan suhu pada posisi  $x$  saat waktu  $t$  sama dengan nol. Suhu saat  $t = 0$  untuk setiap posisi dikatakan masalah nilai awal. Ada tiga syarat batas agar diperoleh solusi secara khusus yaitu syarat batas Dirichlet, syarat batas Neumann, dan syarat batas Robin atau yang biasa dikenal dengan syarat batas campuran.

Penelitian tentang persamaan panas dimensi satu pernah diteliti oleh Agah D. Garnadi (2004) dengan judul *Masalah Syarat Batas Bebas Persamaan Diferensial Parsial Parabolik Satu*. Penelitian tersebut membahas tentang Pendekatan berbagai masalah syarat batas bebas yang eksplisit maupun implisit untuk persamaan difusi satu-dimensi dengan mempergunakan satu barisan masalah syarat batas dari satu persamaan diferensial biasa. Penelitian lain dilakukan oleh Eminugroho, dkk (2013) dengan judul *Eksistensi dan Ketunggalan Solusi Persamaan Panas*. Dalam penelitian tersebut membahas tentang pembentukan persamaan panas dimensi satu dan ketunggalan solusi dalam suatu persamaan panas dimensi satu yang dilengkapi syarat awal dan syarat batas. Di tahun yang sama Yang, Ai-Ming, dkk meneliti tentang persamaan panas dimensi satu dengan judul *Analytical Solutions of the One-Dimensional Heat Equations Arising in Fractal Transient Conduction with Local Fractional Derivative*, penelitian tersebut membahas tentang gradasi panas pada persamaan panas dimensi satu yang timbul pada konduksi fraktal.

Persamaan panas dimensi satu dengan syarat batas yang berbeda telah dibahas pada buku berjudul "*Advanced Engineering Mathematics with Matlab Second Edition*" oleh Duffy, D. G,

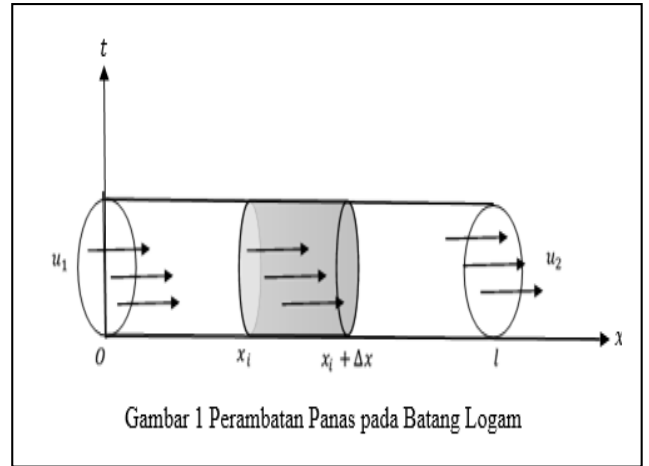
namun pada buku tersebut lebih menekankan perhitungan secara matematis pada kasus syarat batas yang berbeda. Oleh karena itu, pada paper ini akan dibahas persamaan panas dimensi satu secara matematis dan diberikan implementasi secara riil dengan syarat batas yang berbeda. Syarat batas yang digunakan dalam hal ini adalah syarat batas Dirichlet, syarat batas Neumann, serta syarat batas Robin. Proses penyelesaian persamaan panas dimensi satu akan digunakan metode separasi variabel. Metode ini dipilih karena penyelesaian kasus persamaan panas dimensi satu dapat dipisahkan menjadi fungsi-fungsi satu variabel.

**HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

Dalam proses pemodelan persamaan panas satu dimensi akan diambil potongan batang logam tipis seperti pada Gambar (1). Dalam proses pemodelan, ada asumsi yang harus diperhatikan, diantaranya.

1. Aliran panas yang mengalir pada batang logam hanya mengalir dari suhu yang lebih tinggi menyebabkan suhu yang lebih rendah, dan ini sejalan dengan sumbu  $x$  positif.
2. semua permukaan batang logam terisolasi atau dengan kata lain tidak ada aliran panas yang mengalir di seluruh permukaan batang logam.
3. Tidak ada aliran panas yang dihasilkan pada batang logam.
4. Bahan metal yang digunakan adalah logam yang homogen,
5. Potongan luas penampang yang sama.

6. Panas jenis dan konduksi termal pada bahan logam dianggap konstan.



Kemudian dari batang logam dengan panjang  $l$  akan dipartisi sebesar  $\Delta x$ , lalu kita pilih subpartisi  $[x_i, x_i + \Delta x]$ . Pada interval  $[x_i, x_i + \Delta x]$ , akan dipartisi lagi sebesar  $\Delta s$  dengan titik-titik partisinya  $x_i = s_0 < s_1 < s_2 \dots < s_{n+1} = x_i + \Delta x$ . Misalkan  $Q(t)$  merupakan jumlahan panas saat  $t$  pada interval  $[x_i, x_i + \Delta x]$ ,  $m$  massa batang logam pada interval  $[s_i, s_{i+1}]$ , kalor jenis  $c$ , dan  $u(s, t)$  merupakan suhu pada posisi  $s$  saat waktu  $t$ . Apabila  $s_i^* \in [s_i, s_{i+1}]$ , maka  $u(s_i^*, t)$  merupakan perubahan suhu pada interval  $s_i$  sampai  $s_{i+1}$ . Sehingga diperoleh

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^{n+1} \{m c u(s_i^*, t)\} \tag{1}$$

karena  $m = \rho V = \rho A \Delta s$ , maka Persamaan (1) dapat dituliskan menjadi

$$Q(t) \approx \sum_{i=1}^{n+1} \{\rho A c u(s_i^*, t) \Delta s\}. \tag{2}$$

Apabila diambil nilai limitnya mendekati 0, maka Persamaan (2) menjadi

$$Q(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+1} \{\rho A c u(s_i^*, t) \Delta s\}. \tag{3}$$

Menurut definisi dari Integral Tentu, maka Persamaan (3) menjadi

$$Q(t) = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \rho A c u(s_i^*, t) ds. \quad (4)$$

Diasumsikan Persamaan (4) merupakan fungsi kontinu atas  $s$  pada interval  $[x_i, x_i + \Delta x]$ . Menurut Teorema Nilai Rata-Rata Integral yang mengatakan bahwa terdapat  $\varepsilon \in [x_i, x_i + \Delta x]$ , sedemikian sehingga Persamaan (4) menjadi

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \rho A c \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \frac{\partial u(s_i^*, t)}{\partial t} ds. \quad (5)$$

Selanjutnya, akan ditinjau perambatan panas pada batang logam apabila terjadi perbedaan suhu. Pada Gambar (1) perambatan panas pada batang logam terdapat perbedaan suhu diantara kedua sisi, yaitu  $u_1$  dan  $u_2$  dengan  $u_1 > u_2$ . Menurut hasil percobaan yang dilakukan oleh Fourier, maka kecepatan arus panas pada penampang melintang saat posisi ( $x_i$ ) adalah

$$E(x_i, t) = -kA \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x} \quad (6)$$

Demikian pula untuk kecepatan arus panas pada bagian penampang melintang saat posisi ( $x_i + \Delta x$ ), yaitu

$$E(x_i + \Delta x, t) = -kA \frac{\partial u(x_i + \Delta x, t)}{\partial x}. \quad (7)$$

Berdasarkan Persamaan (6) dan (7), sehingga perbedaan kecepatan arus panas yang mengalir pada penampang di posisi  $x_i$  dan posisi  $x_i + \Delta x$  adalah

$$Q(t) = kA \frac{\partial u(x_i + \Delta x, t)}{\partial x} - kA \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x}. \quad (8)$$

Berdasarkan Hukum Fick bahwa perbedaan kecepatan arus panas akan sebanding dengan gradien

konsentrasi jumlahan perambatan panas, sehingga dari Persamaan (5) dan (8) diperoleh

$$\rho \Delta x c \frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} = k \left( \frac{\partial u(x_i + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x} \right)$$

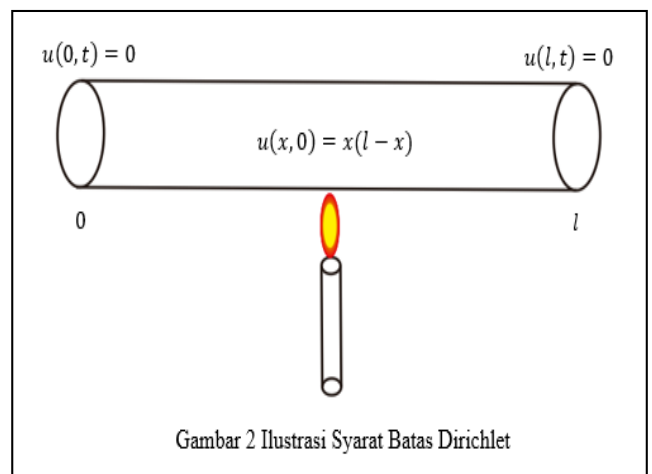
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (9)$$

dengan  $a^2$  difusi termal, Persamaan (9) kemudian disebut dengan Persamaan panas dimensi satu.

Selanjutnya akan dibahas tentang beberapa kasus persamaan panas dimensi satu dengan nilai awal dan syarat batas yang berbeda.

### 1. Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas Dirichlet pada Persamaan Panas Dimensi satu.

Diberikan sebuah lilin dan batang logam yang homogen dengan panjang  $l$ . Lilin tersebut diletakkan di bawah batang logam tepat di tengah, kemudian diberikan benda yang bersifat isolator yang diletakkan di kedua ujungnya. Dalam hal ini, isolator berfungsi untuk mempertahankan suhu di kedua ujung logam yaitu nol derajat. Setelah itu, lilin tersebut dinyalakan dalam beberapa waktu, lalu lilin dimatikan. Untuk ilustrasi lebih jelas tampak pada Gambar (2).



Gambar 2 Ilustrasi Syarat Batas Dirichlet

Akan ditentukan distribusi panas pada Ilustrasi Gambar (2) dengan persamaan yang diberikan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, \quad (10)$$

untuk setiap  $t > 0$ .

Nilai awal

$$u(x, 0) = x(l - x), 0 < x < l \quad (11)$$

dan syarat batas

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (12)$$

untuk setiap  $t > 0$ .

Permasalahan pada Persamaan (10) dengan nilai awal (11) dan syarat batas (12) akan diselesaikan dengan menggunakan metode separasi variabel dan diambil konstanta pemisah  $-\lambda$ , sehingga diperoleh  $\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ . Apabila Persamaan

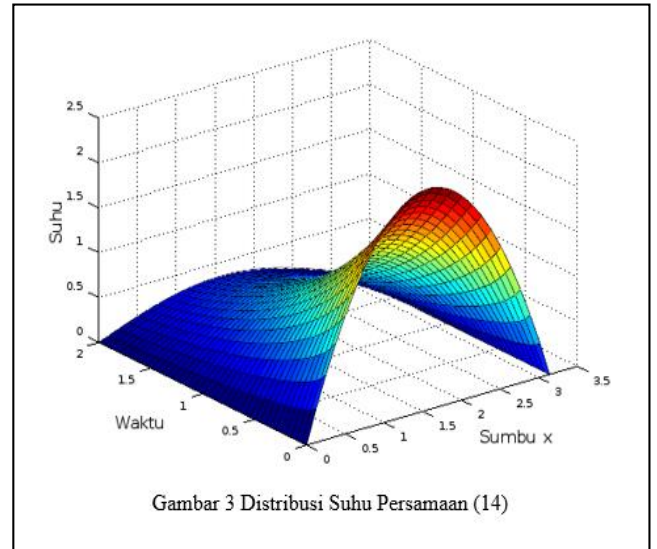
ini diselesaikan, maka diperoleh solusi  $u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2m-1)^3} \right) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{l}\right) e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} t}$ .

Selanjutnya dilakukan simulasi perambatan panas pada batang logam yang telah dipanasi. Jika diambil panjang batang logam sebesar  $l = \pi = 3,14$  satuan panjang, maka diperoleh domain  $0 \leq x \leq 3,14$ . Dalam kasus ini, akan diamati perambatan panas selama 2 satuan waktu, sehingga diperoleh domain  $0 \leq t \leq 2$ . Oleh karena itu, Persamaan (13) dapat dituliskan menjadi

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{(2m-1)^3} e^{-(2m-1)^2 \alpha^2 t} \quad (14)$$

untuk  $0 \leq t \leq 2, 0 \leq x \leq 3,14$ .

Apabila Persamaan ini diplot dengan menggunakan *Software Octave*, maka terlihat seperti pada Gambar (3).



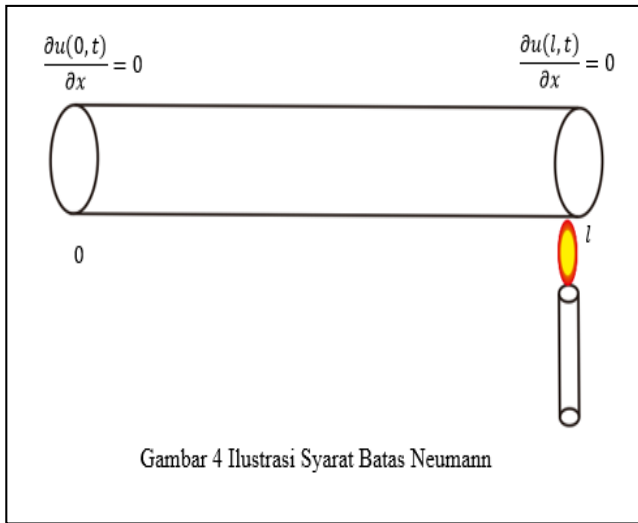
Gambar 3 Distribusi Suhu Persamaan (14)

Berdasarkan *output Octave* pada Gambar (3) bahwa suhu pada posisi  $x = 0$  dan  $x = \pi$  saat waktu  $t = 0$  selalu nol derajat, hal ini dikarenakan suhu di kedua ujungnya dipertahankan sebesar nol derajat. Namun demikian, suhu pada posisi  $x = \frac{\pi}{2}$  saat waktu  $t = 0$  paling tinggi dibandingkan posisi yang lain. Hal ini karena pada posisi  $x = \frac{\pi}{2}$  merupakan pusat sumber panas pada batang logam. Suhu pada posisi  $x = \frac{\pi}{2}$  akan turun, seiring dengan berjalannya waktu hingga diperoleh suhunya menuju nol.

## 2. Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas Neumann pada Persamaan Panas Dimensi satu.

Diberikan sebuah lilin dan batang logam homogen dengan panjang  $l$ . Lilin tersebut diletakkan tepat di bawah posisi  $x = l$ , kemudian lilin dinyalakan selama beberapa waktu, setelah itu lilin dimatikan. Dalam hal ini perubahan suhu di kedua ujung batang logam dipertahankan nol derajat, hal

tersebut dapat digambarkan seperti pada Gambar (4) di bawah ini.



Gambar 4 Ilustrasi Syarat Batas Neumann

Akan ditentukan distribusi panas pada Ilustrasi Gambar (4) dengan persamaan yang diberikan sama dengan Persamaan (10) , namun nilai awal

$$u(x, 0) = x, 0 < x < l \tag{15}$$

dan syarat batas

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

untuk setiap  $t > 0$ . Apabila Persamaan (10) dengan nilai awal Persamaan (15) dan syarat batas Persamaan (16) diselesaikan dengan menggunakan metode separasi variabel dan diambil konstanta pemisah  $-\lambda$ , sehingga diperoleh  $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ . Jika Persamaan ini diselesaikan, maka diperoleh solusi

$$u(x, t) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2m-1)^2} \right) \cos \left( \frac{(2m-1)\pi}{l} x \right) e^{-\frac{\alpha^2(2m-1)^2 \pi^2}{l^2} t} \tag{17}$$

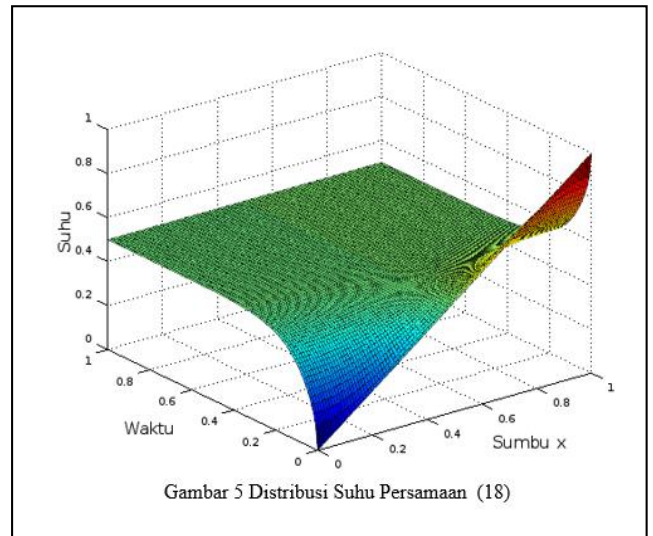
Selanjutnya dilakukan simulasi perambatan panas pada batang logam yang telah dipanasi. Jika diambil panjang batang logam sebesar  $l = 1$  satuan panjang, maka diperoleh domain  $0 \leq x \leq 1$ . Dalam kasus ini, akan diamati perambatan panas selama 1 satuan waktu, sehingga diperoleh

domain  $0 \leq t \leq 1$ . Oleh karena itu, Persamaan (17) akan menjadi

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2m-1)^2} \right) \cos((2m-1)\pi x) e^{-\alpha^2(2m-1)^2 \pi^2 t} \tag{18}$$

untuk  $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ .

Apabila Persamaan (18) diplot menggunakan *Software Octave*, maka terlihat seperti pada Gambar (5).



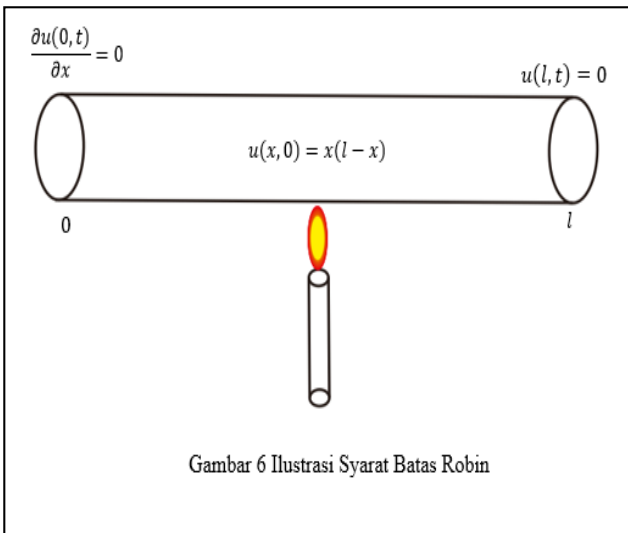
Gambar 5 Distribusi Suhu Persamaan (18)

Berdasarkan *output Octave* pada Gambar (5) terlihat bahwa pada saat waktu  $t = 0$  pada posisi  $x = 1$  suhunya paling tinggi dibandingkan dengan posisi yang lain. Hal ini terjadi karena sumber panas terletak pada posisi  $x = 1$ , sedangkan untuk posisi  $x < 1$  suhunya akan kurang dari satu derajat. Proses perambatan panas dari  $x = 1$  sampai dengan  $x = 0$  saat  $t = 0$  berupa kurva  $u(x, 0) = x$  yang dalam hal ini merupakan nilai awal. Akibat dari sumber panas yang terletak pada posisi  $x = 1$ , sehingga suhu di posisi  $x = 0$  mengalami kenaikan untuk beberapa saat, menuju 0,5 derajat.



### 3. Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas Robin pada Persamaan Panas Dimensi satu

Diberikan sebuah lilin dan batang logam homogen dengan panjang  $l$ . Lilin tersebut diletakkan di bawah batang logam tepat di posisi di tengah, setelah itu lilin dinyalakan beberapa waktu lalu dimatikan. Dalam hal ini, perubahan suhu pada posisi  $x = 0$  dipertahankan pada nol derajat dan suhu pada posisi  $x = l$  dipertahankan nol derajat. Untuk mempertahankan suhunya nol derajat akan digunakan bahan yang bersifat isolator. Untuk ilustrasi lebih jelasnya tampak pada Gambar (6).



Akan ditentukan distribusi panas pada Ilustrasi Gambar (6) dengan persamaan yang diberikan sama dengan Persamaan (10), namun nilai awal

$$u(x, 0) = x(l - x), 0 < x < l \quad (19)$$

dan syarat batas

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = u(l, t) = 0 \quad (20)$$

untuk setiap  $t > 0$ . Permasalahan pada Persamaan (10) dengan nilai awal Persamaan (19) dan syarat batas Persamaan (20) akan diselesaikan dengan menggunakan metode separasi variabel dan diambil konstanta pemisah  $-\lambda$ , sehingga diperoleh

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \text{ Apabila Persamaan ini akan}$$

diselesaikan, maka diperoleh solusi  $u(x, t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) e^{-\frac{\alpha^2(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}t} \quad (21)$$

dengan

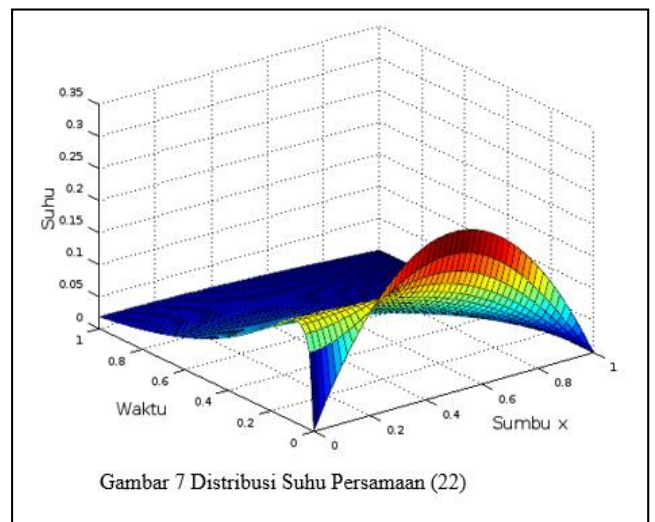
$$B_n = \frac{4(-l^4(2n-1)^2\pi^2(-1)^n - 2l^3 + l(2n-1)^2\pi^2(-1)^n - 8l^3(-1)^n)}{(2n-1)^3\pi^3l}.$$

Selanjutnya dilakukan simulasi perambatan panas pada batang logam yang telah dipanasi. Jika diambil panjang batang logam sebesar  $l = 1$  satuan panjang, maka diperoleh domain  $0 \leq x \leq 1$ . Dalam kasus ini, akan diamati perambatan panas selama 1 satuan waktu, sehingga diperoleh domain  $0 \leq t \leq 1$ . Oleh karena itu, Persamaan (21) akan menjadi

$$u(x, t) = \frac{-8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{\alpha^2(2n-1)^2\pi^2}{4}t} \quad (22)$$

untuk  $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ .

Apabila Persamaan (22) diplot dengan menggunakan *Software Octave*, maka terlihat seperti pada Gambar (7).



Berdasarkan *output Octave* pada Gambar (7) terlihat bahwa suhu yang berada pada titik tengah batang logam untuk  $t = 0$  paling panas dibandingkan dengan dengan posisi yang lain. Hal ini dikarenakan pada posisi tersebut merupakan pusat pemberian panas. Namun, setelah  $t = 0$

suhu pada posisi  $x = \frac{1}{2}$  turun seiring dengan berjalannya waktu. Untuk  $t = 0$ , suhu pada posisi  $x = 0$  dan  $x = 1$  nol derajat, hal ini sesuai dengan nilai awal pada Persamaan (19). Akibat dari pemberian panas tepat di titik tengah dari batang logam, sehingga panas akan merambat menuju kedua ujung batang logam. Oleh karena itu, suhu pada posisi  $x = 0$  yang awalnya nol derajat akan naik untuk beberapa waktu, setelah itu turun hingga suhunya konstan menuju nol derajat. Namun, pada posisi  $x = 1$  saat  $t = 0$  suhunya nol derajat akan tetap nol derajat, hal ini dikarenakan adanya isolator di posisi  $x = 1$ .

## SIMPULAN DAN SARAN

### A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan di bab III dapat disimpulkan bahwa :

1. Model persamaan panas dimensi satu adalah

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

dengan  $x$  menggambarkan domain posisi yang terletak diantara 0 sampai  $l$ ,  $u(x, t)$  suhu pada posisi  $x$  saat waktu  $t$ , dan  $a^2$  merupakan *difusi termal*.

2. Beberapa solusi dari kasus persamaan panas dimensi satu dengan syarat batas yang berbeda.

a. Solusi dari persamaan panas dimensi satu dengan masalah nilai awal  $u(x, 0) = x(l - x)$ ,  $0 < x < l$  dan syarat batas Dirichlet adalah

$$u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2m-1)^3} \right) \sin \left( \frac{(2m-1)\pi x}{l} \right) e^{-\frac{(2m-1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}.$$

b. Solusi dari persamaan panas dimensi satu dengan masalah nilai awal  $u(x, 0) = x$  dan

syarat batas Neumann adalah  $u(x, t) = \frac{l}{2} -$

$$\frac{4l}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \left( \frac{(2m-1)\pi}{l} x \right) e^{-\frac{\alpha^2 (2m-1)^2 \pi^2}{l^2} t}.$$

dengan  $B_m = \frac{1}{(2m-1)^2}$ .

c. Solusi dari persamaan panas dimensi satu dengan masalah nilai awal  $u(x, 0) = x(l - x)$ ,  $0 < x < l$  dan syarat batas Robin adalah  $u(x, t) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) e^{-\frac{\alpha^2 (2n-1)^2 \pi^2}{4l^2} t}$$

dengan  $B_n =$

$$\frac{4(-l^4(2n-1)^2\pi^2(-1)^n - 2l^3 + l(2n-1)^2\pi^2(-1)^n - 8l^3(-1)^n)}{(2n-1)^3\pi^3 l}.$$

### B. Saran

Dalam paper ini hanya dibahas persamaan panas dimensi satu yang homogen. Pada penelitian selanjutnya dapat diperluas untuk pokok bahasan persamaan panas dimensi dua, dimensi tiga yang homogen maupun yang nonhomogen atau aplikasi persamaan panas.

### DAFTAR PUSTAKA

- Agah D. Garnadi. (2004). *Masalah Syarat Batas Bebas Persamaan Diferensial Parsial Parabolik Satu-Dimensi*. Diakses dari [http://math.ipb.ac.id/index.php?Itemid=216&option=com\\_mathipb&act=Publikasi&task=view&id=18](http://math.ipb.ac.id/index.php?Itemid=216&option=com_mathipb&act=Publikasi&task=view&id=18) pada tanggal 30 April 2016, pukul 15.40 WIB.
- Duffy, D. G. (2003). *Advanced Engineering Mathematics with Matlab*. 2<sup>nd</sup>. Ed. Florida: Chapman and Hall/CRC.
- Eminugroho Ratna Sari, Dwi L.& Fitriana Yuli S.(2013). *Eksistensi dan Ketunggalan Solusi Persamaan Panas*. Jurnal Sains Dasar (Nomor 2 tahun 2013). Hlm.41-48.
- Yang, Ai-Ming,dkk. (2013). *Analytical Solutions of the One-Dimensional Heat Equations Arising in Fractal Transient Conduction with Local Fractional Derivative*. Diakses



dari

<http://dx.doi.org/10.1155/2013/462535ResearchArticleAnalytical> pada tanggal 20 Desember 2015, pukul 11.40 WIB.