



**ANALISIS KESTABILAN, KETERKONTROLAN, DAN KETEROBSERVASIAN
MODEL PENDULUM TERBALIK**

***ANALYSIS OF STABILITY, CONTROLLABILITY, OBSERVABILITY OF A MODEL OF
INVERTED PENDULUM***

Cita Puspa Aisyah, Prodi Matematika FMIPA UNY
Fitriana Yuli Saptaningtyas*, Prodi Matematika FMIPA UNY
*e-mail: fitrianatya@uny.ac.id

Abstrak

Peran pendulum terbalik sangat penting dalam kemajuan peradaban manusia. Pendulum terbalik merupakan salah satu model sistem kendali sederhana yang menjadi dasar dalam berbagai penelitian teknologi masa kini. Sistem kendali memungkinkan adanya sistem yang stabil dan akurat. Sistem kendali dibutuhkan agar suatu perintah dapat dijalankan dengan lancar. Contoh sederhana dari sistem kendali ada pada mesin cuci konvensional. Mesin cuci konvensional bekerja dengan prinsip mesin cuci akan mati jika pengatur waktu pada mesin cuci sudah habis tanpa memperhatikan apakah cucian sudah bersih atau belum. Penelitian ini akan mengkaji masalah sistem kendali otomatis pada pendulum terbalik. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan mengumpulkan berbagai referensi. Pemodelan matematika sistem pendulum terbalik dilakukan sebelum menganalisis kestabilan, keterkontrolan, dan keterobservasiannya. Kemudian, dilakukan simulasi numerik secara analitik dan dengan bantuan program MATLAB untuk mendukung hasilnya. Berdasarkan hasil penelitian, ditunjukkan bahwa sistem tidak stabil, tetapi terkontrol dan terobservasi. Dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil tersebut.

Kata kunci: pendulum terbalik, sistem kendali, kestabilan, keterkontrolan, keterobservasian.

Abstract

Inverted pendulum has a very important role in the progress of the human civilization. Inverted pendulum is a simple control system model which is the basis for various current technological researches. Control system allows for the system to run stably and accurately. A control system is needed so that an order can be executed smoothly. A simple example of a control system is in a conventional washing machine. Conventional washing machines work on the principle that the machine will turn off if the time of the washing machine has run out, regardless of whether the laundry is clean or not. This research will examine the problem of automatic control systems inverted pendulums. This research uses the literature study method by collecting various references. Mathematical modeling of the inverted pendulum system is carried out before analyzing its stability, controllability, observability. Then, simulations were carried out analytically and with the help of the Matlab program to support the results. Based on this research, it is known that the inverted pendulum system is unstable, controllable, and observable. The numerical simulations were carried out to support the results.

Keywords: inverted pendulum, control system, stability, controllability, observability.

PENDAHULUAN

Sistem kendali (*control system*) memungkinkan adanya sistem yang stabil dan akurat. Sebuah sistem kendali terdiri dari beberapa komponen yang saling berhubungan, membentuk sebuah konfigurasi sistem, yang akan memberikan respons yang diinginkan guna mencapai tujuan tertentu.

Secara harfiah, sistem kendali akan mengukur keadaan sistem, membandingkan dengan perilaku yang diinginkan, menghitung koreksi yang diperlukan berdasarkan model yang diberikan sebagai respons terhadap pengaruh luar, kemudian memerintahkan sistem agar bergerak sesuai dengan hasil yang telah diperhitungkan. Kegiatan ini dilakukan terus menerus dalam waktu nyata (*real time*) sehingga terbentuk *loop*.

Sistem *loop* diklasifikasikan menjadi dua. Sistem pertama adalah sistem kendali *loop* terbuka (*open loop controls*). Sistem ini mengendalikan proses tanpa melalui umpan balik (*feedback*) sehingga tidak dapat melakukan koreksi variabel untuk mempertahankan *output* nya. Contoh sederhana sistem kendali *loop* terbuka adalah penggunaan mesin cuci konvensional. Mesin cuci konvensional bekerja dengan prinsip mesin cuci akan mati jika *timer* (pengatur waktu pada mesin cuci) yang ditentukan sudah habis (*input*) tanpa memperhatikan apakah cucian sudah bersih atau masih kotor (*feedback*). Apabila cucian masih kotor, *timer* harus diatur ulang secara manual untuk mencuci kembali sehingga diperoleh *output* yang diinginkan (dalam hal ini cucian bersih).

Sedangkan sistem kedua adalah sistem kendali *loop* tertutup (*closed loop controls*). Sistem *loop* tertutup mengendalikan proses dengan memperhatikan umpan balik. Sistem ini disebut juga sebagai sistem kendali umpan balik. Penerapan sistem kendali *loop* tertutup akan menghasilkan sistem yang bergerak secara otomatis. Contoh sederhana sistem kendali *loop* tertutup adalah mesin cuci pintar. Mesin cuci pintar bekerja berdasarkan hasil cucian (*output*). Apabila cucian belum bersih (*feedback*), mesin cuci pintar tidak akan berhenti dan akan terus bekerja (*input*) hingga diperoleh *output* yang diinginkan.

Sistem kendali merupakan sebuah kunci bagi seorang *engineer* untuk dapat menciptakan suatu produk yang dapat memudahkan manusia dalam mengerjakan aktivitas sehari-hari. Sehingga, sangat terlihat bahwa sistem kendali memiliki peran yang sangat penting dalam kemajuan teknologi.

Pada penelitian ini, penulis akan mengkaji masalah sistem kendali otomatis pada sistem pendulum terbalik (*inverted pendulum system*). Sistem pendulum terbalik sangat penting untuk dipelajari karena sistem ini banyak diterapkan sebagai konsep dasar pengembangan teknologi. Contoh penerapan sistem pendulum terbalik yaitu pada masalah mengendalikan sikap rudal pada tahap awal peluncuran. Sistem pendulum terbalik merupakan sistem yang tidak stabil dan tidak linear. Hal ini karena sistem pendulum terbalik dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan hanya dengan sedikit gangguan kecil saja, pendulum dapat jatuh. Dengan melinearisasi persamaan sistem pendulum terbalik di sekitar titik kesetimbangan, sistem akan dianalisis dan dikaji.

Roberge (1960) dalam penelitiannya yang berjudul "*The Mechanical Seal*", menjumlahkan gaya yang terjadi pada kepala sapu (*pendulum*), menemukan fungsi transfer dari persamaan pendulum, lalu menstabilkannya menggunakan fungsi *transfer* pengganti di mana integrasinya diimplementasikan menggunakan *motor-tach* elektromekanik dengan menggunakan Kriteria Nyquist untuk mengilustrasikan kestabilan pada sistem. Sedangkan sistem mekanik disusun menggunakan tabel plot dan integrasi elektromekanik berdasar penelitian yang dilakukan oleh Hall (1950) berjudul "*Dynamic Analysis and Control Laboratory*" (Roberge, 1960).

Penelitian lainnya dilakukan oleh Cannon (1967) dan dicantumkan dalam bukunya yang berjudul "*Dynamics of Physical Systems*". Cannon berhasil menemukan persamaan gerak serta fungsi transfer sistem pendulum dan kereta. Sistem *loop* tertutup tersebut kemudian distabilkan lalu diilustrasikan menggunakan metode *root locus* (Cannon, 1967).

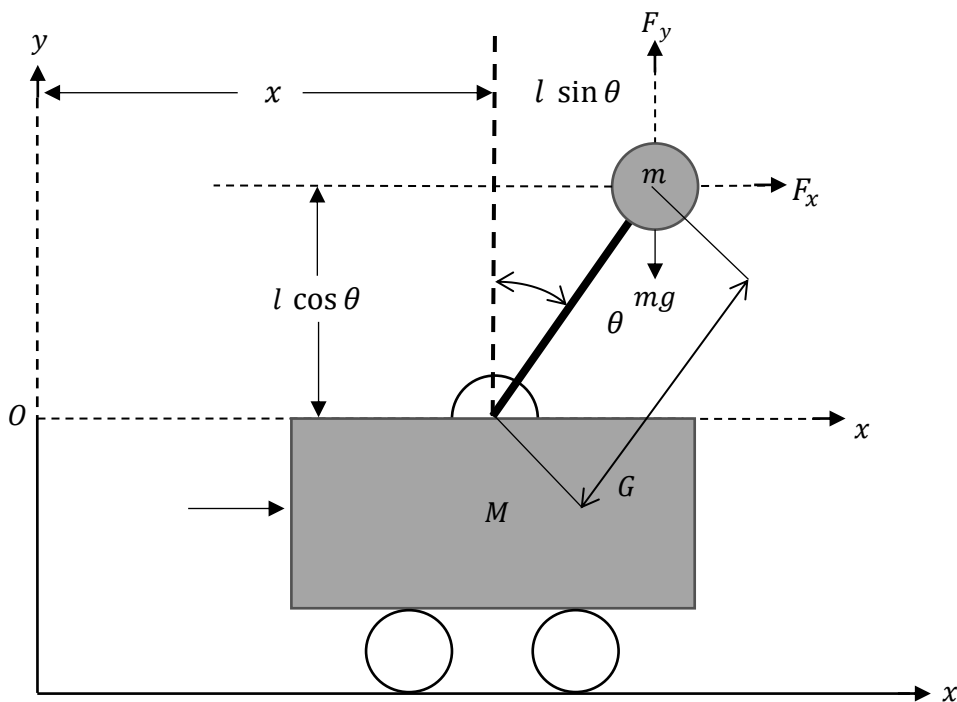
Sedangkan pada penelitian yang dilakukan oleh Dorf (1967), persamaan gerak berhasil ditemukan dengan mengasumsikan bahwa momen inersia diabaikan dan massa kereta (M) lebih berat dari pada masa pendulum (m). Persamaan-persamaan tersebut digunakan untuk memperoleh matriks sistem dari persamaan diferensial orde pertama. Kemudian, dengan menggunakan matriks sistem yang direduksi, pengontrol stabilitas dari sistem pendulum dapat ditemukan (Dorf, 1967).

METODE

Pada penelitian ini akan dilakukan pemodelan matematika pendulum terbalik, menurunkannya dalam model *state space*. Sebelum kemudian dilanjutkan dengan menganalisis kestabilan, keterkontrolan, dan keterobservasian pada sistem pendulum terbalik tersebut. Kemudian berdasarkan hasil analisis, dilakukan simulasi numerik secara analitik dan dengan bantuan program MATLAB untuk mendukung hasilnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Pemodelan Matematika Sistem Pendulum Terbalik



Gambar 1. Sistem pendulum terbalik

Ditunjukkan sebuah sistem koordinat dengan $x(t)$ merepresentasikan posisi kereta dan $\theta(t)$ merupakan sudut kemiringan yang terbentuk mulai dari arah vertikal ke atas. Sedangkan G diasumsikan sebagai titik pusat gravitasi titik massa pendulum yang bergantung pada waktu, diberikan dalam koordinat (x_G, y_G) , dan dapat ditulis sebagai

$$x_G = x + l \sin \theta \tag{1}$$

dan

$$y_G = l \cos \theta \tag{2}$$

dengan l panjang tuas pendulum.

Pemodelan sistem pendulum terbalik akan dibentuk berdasarkan asumsi-asumsi berikut:

1. Persamaan Gerak

Gaya keseimbangan di arah x pada sistem pendulum terbalik memberikan massa kereta dikali dengan percepatan ditambah dengan massa bola pendulum dikali dengan percepatan terhadap arah x pada titik massa pendulum sebanding dengan gaya eksternal (u) yang diberikan pada sistem.

$$u = M \frac{d^2}{dt^2} x + m \frac{d^2}{dt^2} x_G \quad (3)$$

2. Gaya Reaksi Pendulum Terbalik

a. Gaya Reaksi Horizontal

Gaya reaksi horizontal diberikan oleh massa bola pendulum dikali percepatan percepatan terhadap arah x pada titik massa pendulum.

$$F_x = m \frac{d^2}{dt^2} x_G \quad (4)$$

b. Gaya Reaksi Vertikal

Gaya reaksi vertikal diberikan oleh massa bola pendulum dikali percepatan percepatan terhadap arah y pada titik massa pendulum.

$$F_y = m \frac{d^2}{dt^2} y_G \quad (5)$$

3. Resultan Torsi

Dengan cara yang sama, keseimbangan torsi (momen gaya) pada sistem bekerja. Torsi merupakan hasil dari komponen gaya tegak lurus dan jarak ke titik pusat (panjang lengan tuas l). Torsi pada massa yang dipengaruhi oleh percepatan diseimbangkan oleh torsi pada massa yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi.

$$F_x \cos \theta l - F_y \sin \theta l = mg \sin \theta l \quad (6)$$

Dengan menganalisis asumsi-asumsi di atas, dapat dibentuk persamaan differensial nonlinear orde-2 model pendulum terbalik yaitu:

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (7)$$

Persamaan tersebut digunakan untuk menjaga pendulum agar tetap berada pada posisi $\theta = 0$.

B. Penurunan *State Space* Model

Penurunan persamaan nonlinear ke dalam bentuk *state space* pada persamaan nonlinear dalam sistem pendulum terbalik diperlukan untuk dianalisa sistem dinamikanya. Langkah pertama untuk memasukkan persamaan-persamaan tersebut ke dalam bentuk *state space* adalah dengan membuat setiap persamaan hanya memiliki satu suku turunan kedua. Sehingga diperoleh persamaan sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\ddot{x} = \frac{u - m \sin \theta (g \cos \theta - l\dot{\theta}^2)}{(M + m - m \cos^2 \theta)} \quad (8)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - (M + m)g \sin \theta}{ml \cos^2 \theta - (M + m)l} \quad (9)$$

Persamaan tersebut akan direpresentasikan ke bentuk *state space*, diambil variabel-variabel *state* sebagai berikut:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Dengan menganalisis persamaan pendulum terbalik menggunakan variabel-variabel *state space* tersebut, diperoleh bentuk akhir persamaan *state space* sistem pendulum terbalik sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u \cos x_1 + mlx_2^2 \sin x_1 \cos x_1 - (M + m)g \sin x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M + m)l} \\ x_4 \\ \frac{u - m \sin x_1 (g \cos x_1 - lx_2^2)}{(M + m - m \cos^2 x_1)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dalam hal ini, output pada sistem pendulum terbalik tidak terpengaruh oleh input u . Oleh karena itu, diperoleh persamaan *output* yaitu

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Cx$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dengan matriks C, yaitu

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

C. Linearisasi Sistem Persamaan Nonlinear

Sebelum dilakukan analisa kestabilan, linearisasi diperlukan karena persamaan sistem pendulum terbalik masih berbentuk non linear. Dilakukan linearisasi sistem pendulum terbalik di sekitar solusi sudut nol derajat. Diperoleh persamaan linear model sistem pendulum terbalik, yaitu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}u \quad (13)$$

dengan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (15)$$

D. Analisa Kestabilan

Pada sistem yang sudah dilinearisasi, selanjutnya dilakukan analisa kestabilan dengan mencari nilai eigen pada persamaan-persamaan karakteristiknya. Diperoleh titik ekuilibrium dari nilai eigen yaitu

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(0, 0, \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}, -\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}\right). \quad (16)$$

Dilihat terdapat nilai eigen sama dengan nol, sehingga kestabilan sistem linear tidak dapat ditentukan dengan melihat sistem linearnya. Tapi, karena muncul nilai eigen yang selalu real positif maka sistem tidak stabil. Selanjutnya akan dianalisa keterkontrolannya.

E. Analisa Keterkontrolan

Pada sistem yang akan dianalisis, diketahui nilai $n = 4$, sehingga matriks keterkontrolan yang berlaku pada sistem yaitu

$$R = [B|AB|A^2B|A^3B]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ml} & -\frac{(M+m)g}{M^2l^2} & -\frac{(M+m)g}{M^2l^2} \\ -\frac{1}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & \frac{mg}{M^2l} & \frac{mg}{M^2l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{M^2l} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Matriks R dianalisis dan diketahui $rank(R) = n$, maka sistem terkontrol.

F. Analisa Keterobservasian

Pada sistem yang akan dianalisis, diketahui nilai $n = 4$, sehingga matriks keterobservasian yang berlaku pada sistem yaitu

$$W = [C|CA|CA^2|CA^3]^T$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

Berdasarkan analisis di atas, diketahui bahwa $rank(W) = n$, maka sistem terobservasi.

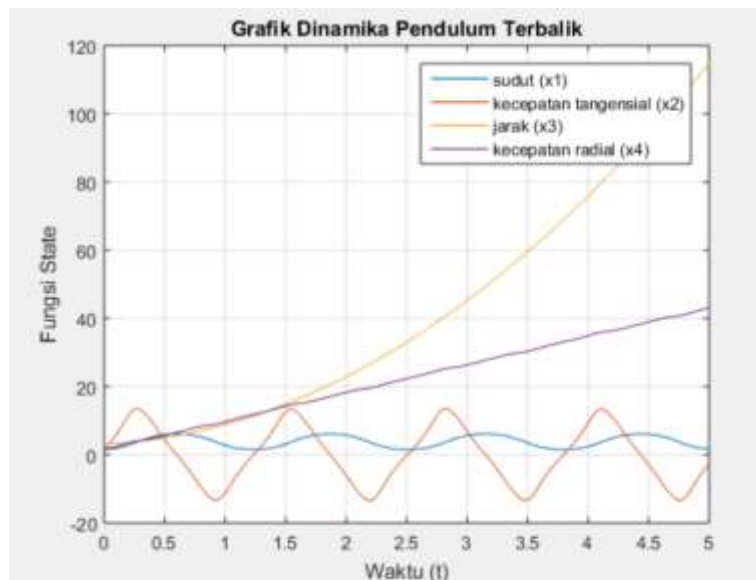
G. Simulasi Numerik

Berikut ini merupakan tabel nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik.

Tabel 1. Nilai Parameter (Mary, Neethu (2015))

Parameter	Nilai	Satuan
Massa kereta (M)	1.096	Kg
Massa pendulum (m)	0.109	Kg
Panjang tuas (l)	0.25	m
Gaya gravitasi (g)	9.8	m/s ²

Dilakukan simulasi menggunakan program MATLAB dengan gaya eksternal $u_0 = 10$ dan $t = 5$ pada persamaan sistem pendulum terbalik. Grafik pada Gambar 2 menunjukkan keterkaitan antara sudut, jarak, kecepatan tangensial, dan kecepatan radial pada sistem. Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa perubahan nilai fungsi *state* sudut bergerak teratur naik turun setiap 0.6 detik sekali. Pada fungsi *state* jarak, dapat dilihat bahwa semakin lama waktu berjalan maka grafik semakin naik secara signifikan. Fungsi *state* kecepatan tangensial bergerak naik pada 0.28 detik pertama kemudian bergerak naik turun secara teratur kurang lebih setiap 0.66 detik berikutnya. Sedangkan untuk fungsi *state* kecepatan radial, dapat dilihat bahwa grafik bergerak naik secara teratur.



Gambar 2. Solusi numerik fungsi *state* sistem pendulum terbalik dengan nilai parameter $u_0 = 10$ selama 5 detik

SIMPULAN

Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan dalam penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika sistem pendulum terbalik menghasilkan persamaan diferensial yaitu

$$\ddot{x} = \frac{u - m \sin \theta (g \cos \theta - l \dot{\theta}^2)}{(M + m - m \cos^2 \theta)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u \cos \theta + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - (M + m)g \sin \theta}{ml \cos^2 \theta - (M + m)l}$$

2. Hasil analisa kestabilan sistem pendulum terbalik memperoleh titik ekuilibrium yaitu

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(0, 0, \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}}, -\sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}} \right)$$

Terdapat nilai eigen sama dengan nol, sehingga kestabilan sistem linear tidak dapat ditentukan dengan melihat sistem linearnya. Tapi, karena muncul nilai eigen yang selalu real positif maka sistem tidak stabil. Selanjutnya akan dianalisa keterkontrolannya.

3. Hasil analisa keterkontrolan menghasilkan matriks keterkontrolan yaitu

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{Ml} & 0 & -\frac{(M + m)g}{M^2 l^2} \\ -\frac{1}{Ml} & 0 & -\frac{(M + m)g}{M^2 l^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{M^2 l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{mg}{M^2 l} & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $rank(R) = 4$. Berdasarkan hasil tersebut, diketahui bahwa sistem pendulum terbalik terkontrol.

4. Hasil analisa keterobservasian menghasilkan matriks keterobservasian sistem pendulum terbalik yaitu

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(M + m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(M + m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $rank(W) = 4$. Berdasarkan hasil tersebut, diketahui bahwa sistem pendulum terbalik terobservasi.

Saran

Pada hasil penelitian, diketahui sistem pendulum terbalik tidak stabil, terkontrol, dan terobservasi. Sehingga untuk penelitian selanjutnya, diharapkan dapat dilakukan penelitian lanjutan mengenai kendali umpan balik dan *observer*-nya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih penulis sampaikan kepada Dosen Pembimbing Skripsi, Koordinator Prodi Matematika, dan seluruh Dosen Prodi dan Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya hingga penelitian ini dapat selesai.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. (1995). *Aljabar Linear Elementer. 5th Edition*. (Alih bahasa: Pantur Silaban, Ph. D). Jakarta: Erlangga.
- Baiti, A, et al. (2019). The Design of Inverted Pendulums as Learning Sources of Adaptive Control. *Journal of Physics: Conference Series*. 1413. 012009. 10.1088/1742-6596/1413/1/012009.
- Cannon, Robert H. (1967). *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill, 703–710.
- Cardoso, Gildeberto & Schnitman, Leizer. (2011). *Analysis of Exact Linearization and Aproximate Feedback Linearization Techniques*. Mathematical Problems in Engineering. doi:10.1155/2011/205939.
- Iqbal, K. (2017). *A First Course in Control System Design (1st ed.)*. New York. River Publishers. <https://doi.org/10.1201/9781003336891>.
- Kalman, R.E. (1968). *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*. J.S.I.A.M. Control Ser. A, Vol. 1, No. 2.
- Lundberg, Kent. (2009). *History of Inverted-Pendulum Systems*. IFAC Proceedings Vol. 42. 131-135. Doi:10.3182/20091021-3-JP-2009.00025.
- Ma, Qiang. (2015). [IEEE 2015 IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC) - Chongqing, China (2015.12.19-2015.12.20)] 2015 IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC) - Controllability of inverted pendulum: Initial parameters impact analysis. , (), 853–856. Doi:10.1109/iaeac.2015.7428677 .
- Nababan, S.M. (1989). *Materi Pokok Transformasi Laplace Bagian I, MATK 4332 (Cet.1)*. Jakarta: UT.
- Nuryadi. 2018. Pengantar Persamaan Diferensial Elementer dan Penerapannya. Yogyakarta: Penebar Media Pustaka
- Nuryadi. 2018. Pengantar Persamaan Diferensial Elementer dan Penerapannya. Yogyakarta: Penebar Media Pustaka
- Nuryadi. (2018). *Pengantar Diferensial Elementer dan Penerapannya*. Yogyakarta: Penebar Media Pustaka.
- Olsder, G.J. & Woude, J.W. (2003). *Mathematical System Theory, 2nd Edition*. Netherland: Delft University of Technology.
- Roberge, James K. (1960). *The Mechanical Seal*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.
- Rowell, D. (2002). *Handout of the course: Analysis and Design of Feedback Control Systems State-Space Representation of LTI Systems*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. <http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/StateSpace.pdf>.
- Salmah. (2020). *Teori Sistem Kendali Linear dan Aplikasinya*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Syamsuddin, Eniman Y. & Ida, Aciek W.D. (1999). *Buku Pegangan Kuliah: Sistem Kendali*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Shaikhet, Leonid. (2012). Stability of equilibrium points of differential equation with fractional nonlinearity and stochastic perturbations. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*. 19. 709-729.
- Qomarudin, Mochamad. (2017). *Linierisasi Sistem Nonlinier: Satu Contoh Sederhana*. Doi: 10.13140/RG.2.2.19389.05605.