



**ANALISIS MODEL SIR (SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED) UNTUK
PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD) DI
KABUPATEN PURWOREJO**

***ANALYSIS OF THE SIR (SUSCEPTIBLE INFECTED RECOVERED) MODEL FOR THE
SPREAD OF DENGUE HEMORRHAGIC FEVER (DHF) IN PURWOREJO REGENCY***

Siswira Kurniastuti, Prodi Matematika FMIPA UNY

Husna Arifah*, Prodi Matematika FMIPA UNY

*e-mail: husna_arifah@uny.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan menganalisis mengenai model matematika, titik keseimbangan, dan hasil numerik terhadap penyebaran penyakit Demam Berdarah *Dengue* (DBD) di Kabupaten Purworejo dengan menggunakan model SIR (*Susceptible Infected Recovered*). Penelitian ini menggunakan data sekunder mengenai jumlah masyarakat Kabupaten Purworejo yang rentan, terinfeksi, dan sembuh dari penyakit DBD dan diperoleh dari Dinas Kesehatan Kabupaten Purworejo. Hasil analisis model SIR penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo diperoleh bilangan reproduksi dasar 3,44 yang artinya penyakit DBD bersifat endemik di Kabupaten Purworejo dan titik keseimbangan yaitu (176.951,57; 818,48; 889,01; 22.159,83). Hal ini berarti penyakit DBD tidak hilang di Kabupaten Purworejo. Namun, jumlah individu rentan dan terinfeksi cenderung mengalami penurunan atau mengalami kestabilan, sedangkan jumlah individu sembuh mengalami peningkatan.

Kata kunci: Demam Berdarah *Dengue* (DBD), model SIR, titik keseimbangan.

Abstract

This study aims to identify and analyze the mathematical model, equilibrium point, and numerical results for the spread of Dengue Hemorrhagic Fever (DHF) in Purworejo Regency using the SIR (Susceptible Infected Recovered) model. The research uses secondary data regarding the number of people in Purworejo Regency who are susceptible, infected, and recovered from DHF and obtained from Dinas Kesehatan Kabupaten Purworejo. The results of the analysis of the SIR model of the spread of DHF in Purworejo Regency obtained a basic reproduction number of 3.44, which means that DHF is endemic in Purworejo Regency and the equilibrium point is (176.951,57; 818,48; 889,01; 22.159,83). This means that DHF does not disappear in Purworejo Regency. However, the number of susceptible and infected individuals tends to decrease or stabilize, while the number of recovered individuals has increased.

Keywords: *Dengue Hemorrhagic Fever (DHF), SIR model, equilibrium point.*

PENDAHULUAN

Demam Berdarah *Dengue* (DBD) merupakan penyakit demam akut yang disebabkan oleh virus *dengue* yang masuk ke peredaran darah manusia melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus*. Penyakit ini umumnya akan menyerang anak-anak yang berusia kurang dari 15 tahun namun dapat juga menyerang orang dewasa (Kementerian Kesehatan RI, 2016). Penyakit DBD saat ini masih menjadi salah satu masalah kesehatan dan ancaman serius di sejumlah wilayah di Indonesia. Peningkatan kasus DBD mulai terjadi pada saat musim penghujan tiba. Kemenkes RI mencatat kasus *Dengue* di Indonesia pada tahun 2022 ini sudah mencapai 87.501 kasus dengan jumlah kematian akibat DBD mencapai 816 kasus. (Kementerian Kesehatan RI, 2022)

Penyakit yang pertama kali dilaporkan ada di Indonesia pada tahun 1968 ini sudah terjadi di 449 kabupaten/kota yang tersebar di 34 provinsi dengan kematian tersebar di 162 kabupaten/kota di 31 provinsi. Salah satu kabupaten yang memiliki jumlah kasus yang tinggi yaitu Kabupaten Purworejo. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Dinas Kesehatan Kabupaten Purworejo, pada tahun 2020 jumlah kasus penderita DBD mencapai 134 kasus, namun pada tahun 2021 mengalami penurunan yang cukup drastis yaitu hanya ada 7 kasus yang ditemukan. Hal ini dikarenakan adanya kasus Pandemi *Covid-19* sehingga masyarakat Kabupaten Purworejo takut untuk berobat baik ke puskesmas maupun ke rumah sakit. Oleh karena itu, pada tahun 2021 tidak banyak yang teridentifikasi untuk penyakit Demam Berdarah *Dengue* ini. Namun pada akhir tahun 2021 dan awal tahun 2022 ini kasus DBD di Kabupaten Purworejo mengalami peningkatan kasus yang cukup signifikan (Dinkes Kabupaten Purworejo, 2022).

Berdasarkan kasus tersebut perlu adanya penanganan dan solusi untuk mencegah penularan ataupun penyebaran penyakit DBD ini dari bidang ilmu pengetahuan. Salah satu ilmu pengetahuan bidang matematika dapat menggunakan model matematika. Model matematika merupakan persamaan atau pertidaksamaan yang menyatakan suatu permasalahan yang nyata (Widowati & Sutimin, 2007). Model matematika yang dibuat berdasarkan asumsi-asumsi, dan yang telah dibentuk akan dilakukan analisis agar model yang dibuat dapat menjelaskan terhadap permasalahan yang dibahas (Syafurudin, et al. 2018). Model matematika yang dapat digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* (DBD) adalah model SIR (*Susceptible Infected Recovered*).

Model SIR dapat digunakan dalam permasalahan penyebaran penyakit karena model SIR membagi populasi menjadi tiga kondisi sehingga memudahkan peneliti dalam menganalisis model. Adapun tiga kondisi dari model SIR (*Susceptible Infected Recovered*) tersebut yaitu, *susceptible* (S) adalah kondisi individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit, *infected* (I) adalah kondisi individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit, serta *recovered* (R) adalah kondisi individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (Sari, 2014). Model ini juga digunakan untuk memperoleh satu titik ekuilibrium bebas penyakit yang dapat menjamin kestabilan dari model (Puspitasari, 2018).

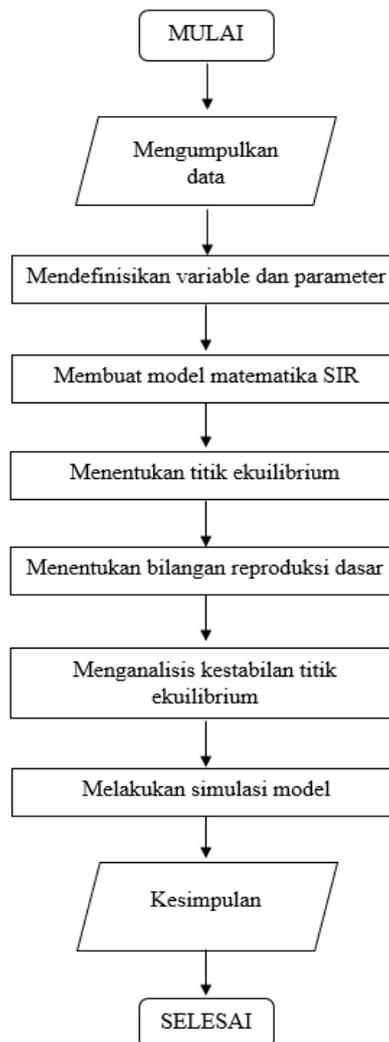
Analisis model SIR yang dilakukan oleh Zeth A. Leleury, dkk (2017) mengenai penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* di Provinsi Maluku. Pada penelitian tersebut dilakukan untuk menentukan bentuk khusus model SIR dan analisis stabilitas pada model SIR terhadap penyebaran penyakit DBD di Provinsi Maluku. Sehingga dapat diketahui penyakit DBD di Provinsi Maluku dapat menjadi endemi atau pandemi. Syafrudin Side, dkk (2018) membahas mengenai modifikasi model SIR pada penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Bone dengan penambahan asumsi bahwa 20% penderita DBD yang sembuh akan terinfeksi dan 80% dari individu yang telah sembuh, tidak akan kembali menjadi rentan, serta melakukan simulasi menggunakan *Maple*. Sedangkan Suhendri Londah, dkk (2019) melakukan penerapan model SIR terhadap perkembangan penyakit DBD di Kota Tomohon. Pada penelitian tersebut, dilakukan penentuan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit DBD di Kota Tomohon.

Dari hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa terdapat dua titik kesetimbangan model SIR terhadap perkembangan penyakit DBD di Kota Tomohon yaitu titik bebas penyakit dan titik tetap endemik.

Berdasarkan permasalahan di atas, maka dalam penelitian ini akan melakukan analisis model SIR untuk penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* (DBD) di Kabupaten Purworejo. Dalam penelitian ini model SIR untuk penyebaran penyakit DBD akan digunakan untuk menentukan titik keseimbangan, stabilitas, bilangan reproduksi dasar, dan akan dilakukan simulasi model. Simulasi tersebut akan menggunakan *Software Maple* dengan memasukkan nilai parameter pada model untuk menjelaskan kondisi penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo sehingga hasilnya akan ditampilkan dalam bentuk kurva.

METODE

Penelitian ini menggunakan data sekunder yang sebagian diperoleh dari Dinas Kesehatan Kabupaten Purworejo. Data yang digunakan berupa jumlah penduduk Kabupaten Purworejo yang rentan, terinfeksi, dan sembuh dari penyakit DBD pada tahun 2020. Penelitian ini dilakukan pada bulan Agustus-September 2022. Metode yang digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo adalah model SIR (*Susceptible Infected Recovered*). Berikut merupakan Gambar 1 mengenai langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini.



Gambar 1. Diagram alir langkah-langkah penelitian

Berdasarkan Gambar 1, langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan data yang digunakan dalam penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo.
2. Mendefinisikan dan menghitung variabel dan parameter yang diperoleh dari data.
3. Membentuk model SIR untuk penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo.
4. Menentukan titik ekuilibrium dari persamaan SIR penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo.
5. Menentukan bilangan reproduksi dasar dari penyakit DBD di Kabupaten Purworejo.
6. Menganalisis titik ekuilibrium dari persamaan SIR penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo.
7. Melakukan simulasi penyebaran penyakit DBD dengan menggunakan *Maple*.
8. Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model SIR Penyebaran Penyakit DBD

Model SIR (*Susceptible Infected Recovered*) merupakan model matematika yang dapat digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* (DBD) di Kabupaten Purworejo. Maka akan diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut.

1. Pertambahan/pengurangan penduduk hanya dikarenakan kelahiran dan kematian, sedangkan pertambahan/pengurangan yang disebabkan faktor lain diabaikan.
2. Kematian yang disebabkan oleh faktor lain selain terinfeksi DBD dianggap sebagai kematian alami.
3. Laju kelahiran sama dengan laju kematian, sehingga total populasi diasumsikan konstan.
4. Individu yang belum terserang penyakit termasuk ke dalam kelas *susceptible*.
5. Individu pada kelas *recovered* tidak akan kembali menjadi individu pada kelas *infected*.
6. Individu yang terinfeksi penyakit DBD dapat sembuh.
7. Terjadi kematian akibat penyakit DBD.

Variabel yang akan digunakan dalam model penyebaran penyakit DBD disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Variabel yang digunakan dalam model SIR penyebaran penyakit DBD

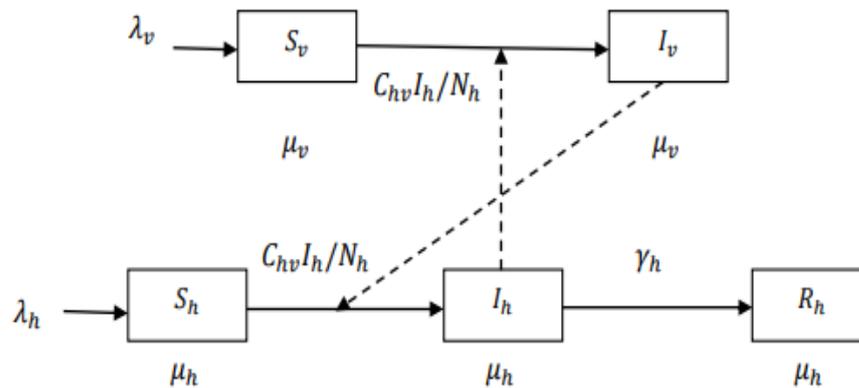
Variabel	Keterangan	Ketentuan
$N_h(t)$	Jumlah populasi manusia pada waktu t	$N_h(t) \geq 0$
$N_v(t)$	Jumlah populasi nyamuk pada waktu t	$N_v(t) \geq 0$
$S_h(t)$	Jumlah individu rentan (<i>susceptible</i>) terkena penyakit DBD pada waktu t	$S_h(t) \geq 0$
$I_h(t)$	Jumlah individu terinfeksi (<i>infected</i>) terkena penyakit DBD pada waktu t	$I_h(t) \geq 0$
$R_h(t)$	Jumlah individu sembuh (<i>recovered</i>) terkena penyakit DBD pada waktu t	$R_h(t) \geq 0$
$S_v(t)$	Jumlah nyamuk yang rentan terinfeksi pada waktu t	$S_v(t) \geq 0$
$I_v(t)$	Jumlah nyamuk yang terinfeksi pada waktu t	$I_v(t) \geq 0$

Pada Tabel 2, dapat dilihat parameter yang akan digunakan dalam model SIR penyebaran penyakit DBD.

Tabel 2. Parameter yang digunakan dalam model SIR penyebaran penyakit DBD

Parameter	Keterangan	Ketentuan
λ_h	Tingkat kelahiran individu manusia	$0 \leq \lambda_h \leq 1$
λ_v	Tingkat kelahiran individu nyamuk	$0 \leq \lambda_v \leq 1$
μ_h	Tingkat kematian alami individu manusia	$0 \leq \mu_h \leq 1$
μ_v	Tingkat kematian alami individu nyamuk	$0 \leq \mu_v \leq 1$
β	Tingkat penularan dari individu terinfeksi ke individu yang rentan	$0 \leq \beta \leq 1$
γ_h	Tingkat kesembuhan individu terinfeksi menjadi individu yang sehat	$0 \leq \gamma_h \leq 1$

Berdasarkan masalah-masalah yang diasumsikan serta variabel dan parameter yang digunakan maka dapat dibuat skema penyebaran penyakit DBD seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram alir model SIR penyebaran penyakit DBD

Berdasarkan diagram alir model matematika penyebaran penyakit DBD pada Gambar 2, dapat dibentuk formulasi model SIR untuk penyebaran penyakit DBD sebagai berikut.

Model Matematika Populasi Manusia

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - \left(\mu_h + p + \frac{C_{hv} I_v}{N_h} \right) S_h \quad (1)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{C_{vh} I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h \quad (2)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = p S_h + \gamma_h I_h - \mu_h R_h \quad (3)$$

Model Matematika Populasi Nyamuk

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - \left(\mu_v + \frac{C_{hv} I_h}{N_h} \right) S_v \quad (4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{C_{hv} I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v \quad (5)$$

$$S_h + I_h + R_h = N_h \text{ dan } S_v + I_v = N_v$$

Keterangan:

S_v : populasi nyamuk yang rentan terinfeksi

I_v : populasi nyamuk yang terinfeksi

- S_h : populasi manusia yang rentan terinfeksi
- I_h : populasi manusia yang terinfeksi
- R_h : populasi manusia yang sembuh
- N_h : total populasi manusia
- N_v : total populasi nyamuk
- λ_h : laju kelahiran manusia
- λ_v : laju kelahiran nyamuk
- μ_h : laju kematian manusia
- μ_v : laju kematian nyamuk
- p : fraksi acak manusia rentan imunisasi
- γ_h : proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh
- C_{hv} : peluang terjadinya kontak antara nyamuk rentan dengan manusia terinfeksi
- C_{vh} : peluang terjadinya kontak antara nyamuk terinfeksi dengan manusia rentan

Analisis Model SIR Menggunakan Data Penderita Penyakit DBD di Kabupaten Purworejo

Pada model epidemi SIR DBD digunakan dua populasi yaitu populasi manusia dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* sehingga dapat dilakukan suatu estimasi parameter pada setiap populasi.

a. Populasi manusia

Populasi manusia dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu manusia rentan (*susceptible*), manusia terinfeksi (*infected*), dan manusia sembuh (*recovered*). Manusia rentan adalah manusia yang belum tertular virus *dengue*. Manusia terinfeksi adalah manusia manusia yang telah tertular virus dan dapat menularkan virus tersebut. Manusia sembuh dianggap tidak dapat tertular lagi.

Laju kelahiran manusia (λ_h) dapat dihitung berdasarkan jumlah bayi yang lahir per satuan waktu. Jumlah bayi yang lahir di Kabupaten Purworejo pada tahun 2020 adalah 9.051 bayi. Sehingga rata-rata kelahiran bayi perbulan adalah 754 bayi (BPS Jawa Tengah, 2020). Sedangkan untuk laju kematian (μ_h) dapat dihitung berdasarkan angka harapan hidup Kabupaten Purworejo. Menurut data dari Badan Pusat Statistika Provinsi Jawa Tengah, angka harapan hidup Kabupaten Purworejo adalah 74 tahun. Sehingga laju kematian manusia adalah sebagai berikut:

$$\mu_h = \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} = \frac{1}{74 \text{ tahun}} = \frac{1}{888 \text{ bulan}} = 0,00113/\text{bulan}.$$

Proporsi perpindahan manusia rentan ke manusia terinfeksi dipengaruhi oleh peluang terjadinya kontak antara nyamuk terinfeksi dan manusia rentan (C_{hv}). Nilai peluang ini adalah perkalian antara peluang transmisi virus dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan (p_{vh}) dengan rata-rata gigitan nyamuk (b_i). Dengan nilai transmisi virus dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan (p_{vh}) dan nilai transmisi virus dari manusia terinfeksi ke nyamuk (p_{hv}) adalah 0,75 (Derouich et al, 2003). Sedangkan nilai parameter lainnya dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Parameter Gigitan Nyamuk dan Kontak Nyamuk dan Manusia

Parameter	Notasi	Nilai
Gigitan nyamuk rentan perhari	b_i	1 gigitan
Gigitan nyamuk terinfeksi perhari	b_s	0,5 gigitan
Kontak antara nyamuk rentan dengan manusia terinfeksi	C_{hv}	22,5
Kontak antara nyamuk terinfeksi dengan manusia rentan	C_{vh}	11,25

Pada tahun 2020 jumlah penduduk Kabupaten Purworejo yang sembuh dari penyakit DBD sebanyak 134 jiwa, jadi $R = 134$ jiwa. Rata-rata masa infektivitas untuk penyakit DBD pada manusia adalah 4 hari = 0,133/bulan. Sehingga proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh adalah:

$$\gamma_h = \frac{1}{\text{masa infektivitas}} = \frac{1}{0,133 \text{ bulan}} = 7,52/\text{bulan}$$

Data mengenai jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* (N_v) di Kabupaten Purworejo tidak tersedia, sehingga diasumsikan jumlah nyamuk *Aedes aegypti* di Kabupaten Purworejo pada tahun 2020 didasarkan pada asumsi jumlah nyamuk *Aedes aegypti* yang ditemukan di salah satu desa di Kabupaten Purworejo yaitu sekitar 30 ekor/bulan.

$$\begin{aligned} N_v &= \text{Jumlah nyamuk(bulan)} \times \text{jumlah desa} \times \text{jumlah bulan} \\ &= 30 \text{ ekor} \times 494 \text{ desa} \times 12 \text{ bulan} \\ &= 177.840 \text{ ekor/tahun} \end{aligned}$$

Sehingga probabilitas penularan nyamuk ke manusia adalah:

$$\beta_{vh} = \frac{R_h}{N_v \times D_h} = \frac{134}{177.840 \times 0,133 \text{ bulan}} = 0,00566/\text{bulan}$$

b. Populasi nyamuk

Populasi nyamuk dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi. Nyamuk rentan adalah nyamuk yang belum tertular virus sedangkan nyamuk terinfeksi adalah nyamuk yang telah tertular dan dapat menularkan virus tersebut.

Nyamuk *Aedes aegypti* betina merupakan vektor utama penyebab penyakit DBD. Hal ini dikarenakan hanya nyamuk betina yang menggigit dan menghisap darah serta memilih darah manusia untuk mematangkan telurnya. Sedangkan nyamuk jantan tidak bisa menggigit dan hidup dari sari tumbuh-tumbuhan (Purba, 2013). Dengan umur nyamuk *Aedes aegypti* adalah 2 bulan, tetapi sebagian dapat hidup 2-3 bulan, sehingga rata-rata umur nyamuk *Aedes aegypti* adalah 5,5 minggu (Rohmani A, 2012). Data jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* di Kabupaten Purworejo tidak tersedia sehingga diasumsikan berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Nugroho (2019) di Desa Jatirejo, Kecamatan Kaligesing, Kabupaten Purworejo ditemukan nyamuk *Aedes aegypti* sebanyak 2 ekor per dua hari. Jadi didapatkan rata-rata jumlah nyamuk *Aedes aegypti* adalah sekitar 30 ekor nyamuk perbulannya. Karena terdapat 494 desa/kelurahan di Kabupaten Purworejo sehingga jumlah nyamuk *Aedes aegypti* di Kabupaten Purworejo diasumsikan sebanyak 14.820 ekor/bulan. Dengan laju kematian nyamuk (μ_v) dapat dihitung dari angka harapan hidup nyamuk, yaitu

$$\mu_v = \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} = \frac{1}{38,5 \text{ hari}} = \frac{1}{1,28 \text{ bulan}} = 0,78/\text{bulan}.$$

Pada umumnya, nyamuk menggigit mulai dari pukul 08.00 – 12.00 di pagi hari dan pukul 15.00 – 17.00 di sore hari. Namun, data populasi nyamuk *Aedes aegypti* yang terinfeksi DBD tidak tersedia sehingga diasumsikan jumlah nyamuk *Aedes aegypti* yang terinfeksi di Kabupaten Purworejo dalam sehari ada 494 ekor nyamuk yang menggigit manusia, jadi $R_v = 494$ ekor. Masa hidup untuk nyamuk adalah 26 hari atau 0,866 bulan. Jumlah populasi manusia (N_h) di Kabupaten Purworejo pada tahun 2020 adalah 769.880 jiwa (BPS Jawa Tengah, 2020). Peluang penularan dari manusia terinfeksi ke nyamuk adalah sebagai berikut.

$$\beta_{hv} = \frac{R_v}{N_h \times D_v} = \frac{494}{769.880 \times 0,866 \text{ bulan}} = 0,000741/\text{bulan}$$

Dari uraian di atas, nilai variabel dan parameter pada penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Nilai variabel dan parameter pada penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo

Variabel/Parameter	Nilai
N_h	769.880 orang
N_v	177.840 ekor
S_h	769.612 orang
I_h	134 orang
R_h	134 orang
S_v	163.020 ekor
I_v	14.820 ekor
μ_h	0,00113/bulan
μ_v	0,78/bulan
γ_h	7,52
p	0,75
C_{vh}	11,25
C_{hv}	22,5

Sumber: Dinas Kesehatan Kab.Purworejo & BPS Prov. Jawa Tengah (2020)

Diperoleh formulasi model SIR DBD Kabupaten Purworejo dapat ditulis dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang ada ke dalam persamaan berikut.

$$\frac{dS_h}{dt} = 0,00113 \times 769.880 - \left(0,00113 + 0,75 + \frac{22,5I_v}{769.880}\right) S_h \quad (6)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{22,5I_v}{769.880} S_h - (0,00113 + 7,52)I_h \quad (7)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = 0,75S_h + 7,52I_h - 0,00113R_h \quad (8)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = 0,78 \times 177.840 - \left(0,78 + \frac{11,25I_h}{769.880}\right) S_v \quad (9)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{11,25I_h}{769.880} S_v - 0,78I_v \quad (10)$$

dengan

$$S_h(0) = 769.612, I_h(0) = 134, R_h(0) = 134 \quad (11)$$

$$S_v(0) = 163.020, I_v(0) = 14.820 \quad (12)$$

Titik Keseimbangan Model DBD

Titik keseimbangan dari penyakit DBD diperoleh dengan mengkaji sistem pada keadaan konstan terhadap t yaitu, $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, dan $\frac{dR}{dt} = 0$. Titik keseimbangan endemik model DBD, jika $I_v \neq 0$ akan diperoleh ada nyamuk yang terinfeksi DBD dan dapat menyebabkan endemik. Jika $I_h \neq 0$ maka akan diperoleh ada manusia yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit serta menyebabkan endemik. Titik keseimbangan endemik $E^1 = (S_{v1}, I_{v1}, S_{h1}, I_{h1})$ adalah sebagai berikut:

Untuk $\frac{dS_v}{dt} = 0$, maka didapat

$$\begin{aligned} \mu_v N_v - \left(\mu_v + \frac{C_{hv} I_h}{N_h}\right) S_v &= 0 \\ \left(\mu_v + \frac{C_{hv} I_h}{N_h}\right) S_v &= \mu_v N_v \\ S_v &= \frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{C_{hv} I_h}{N_h}} \end{aligned}$$

Untuk $\frac{dI_v}{dt} = 0$, maka didapat

$$\begin{aligned} \frac{c_{hv}I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v &= 0 \\ \mu_v I_v &= \frac{c_{hv}I_h}{N_h} S_v \\ I_v &= \frac{c_{hv}I_h}{N_h \mu_v} S_v \end{aligned}$$

Untuk $\frac{dS_h}{dt} = 0$, maka didapat

$$\begin{aligned} \mu_h N_h - \left(\mu_h + p + \frac{c_{vh}I_v}{N_h} \right) S_h &= 0 \\ \left(\mu_h + p + \frac{c_{vh}I_v}{N_h} \right) S_h &= \mu_h N_h \\ S_h &= \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh}I_v}{N_h}} \end{aligned}$$

Untuk $\frac{dI_h}{dt} = 0$, maka didapat

$$\begin{aligned} \frac{c_{vh}I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h &= 0 \\ (\mu_h + \gamma_h) I_h &= \frac{c_{vh}I_v}{N_h} S_h \\ I_h &= \frac{\frac{c_{vh}I_v}{N_h} S_h}{\mu_h + \gamma_h} \\ I_h &= \frac{c_{vh}I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \end{aligned}$$

Diperoleh titik endemik model DBD adalah $E^1 = \left(\frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv}I_h}{N_h}}, \frac{c_{hv}I_h}{N_h \mu_v} S_v, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh}I_v}{N_h}}, \frac{c_{vh}I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right)$.

Dari proses perhitungan sebelumnya telah diperoleh rumusan bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \mu_v^2 \mu_h^2 + \mu_v \mu_h \gamma_h + \mu_v^2 p \mu_h + \mu_v^2 p \gamma_h$$

Sesuai nilai dari parameter pada Tabel 4 maka diperoleh:

$$\begin{aligned} R_0 &= (0,78)^2(0,00113)^2 + (0,78)(0,00113)(7,52) + \\ &\quad (0,78)^2(0,75)(0,00113) + (0,78)^2(0,75)(7,52) \\ R_0 &= (0,6084)(0,0000012769) + (0,006628128) + \\ &\quad (0,6084)(0,0008475) + (0,6084)(5,64) \\ R_0 &= (0,00000077686596) + (0,006628128) + (0,000515619) + (3,431376) \\ R_0 &= 3,43852052386596 \\ R_0 &\approx 3,44 \end{aligned}$$

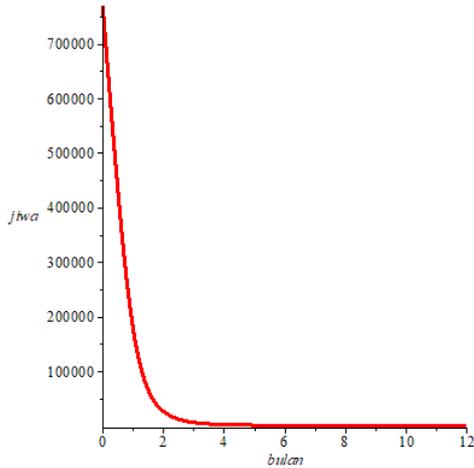
Dengan demikian, setelah mensubstitusikan nilai dari parameter ke persamaan bilangan reproduksi dasar dan melakukan perhitungan maka diperoleh bahwa model epidemik DBD memiliki nilai R_0 sebesar 3,44. Karena $R_0 > 1$ maka titik keseimbangan endemik adalah

$$\begin{aligned} E^1 &= (S_{v1}, I_{v1}, S_{h1}, I_{h1}) \\ &= \left(\frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv}I_h}{N_h}}, \frac{c_{hv}I_h}{N_h \mu_v} S_v, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh}I_v}{N_h}}, \frac{c_{vh}I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right) \\ &= (176.951,57 ; 818,48 ; 889,01 ; 22.159,83) \end{aligned}$$

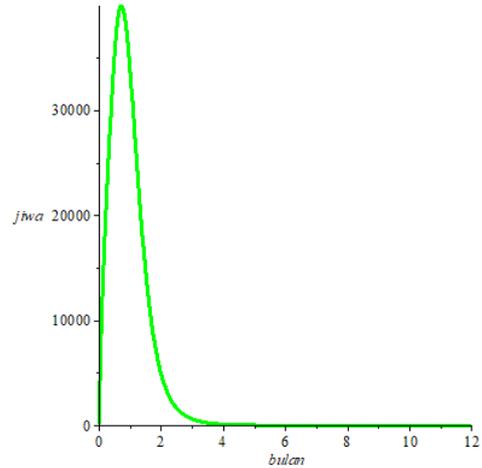
Dengan demikian, titik keseimbangan endemik tersebut stabil asimtotik dan penyakit tersebut tidak hilang dari populasi serta menjadi endemik di Kabupaten Purworejo. Nilai $R_0 > 1$ artinya setiap penderita dapat menularkan penyakit DBD kepada lebih dari satu penderita baru, sehingga dapat menyebarkan penyakit yang lebih luas.

Simulasi Model SIR DBD di Kabupaten Purworejo

Simulasi Model SIR DBD di Kabupaten Purworejo berdasarkan Persamaan (5) sampai dengan (11) diperoleh plot *susceptible* populasi manusia dari model DBD seperti pada Gambar 3 dan plot *infected* populasi manusia dari model DBD seperti pada Gambar 4.

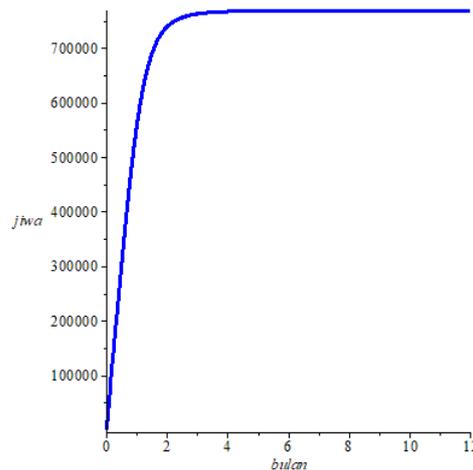


Gambar 3. Plot *susceptible* model SIR pada DBD



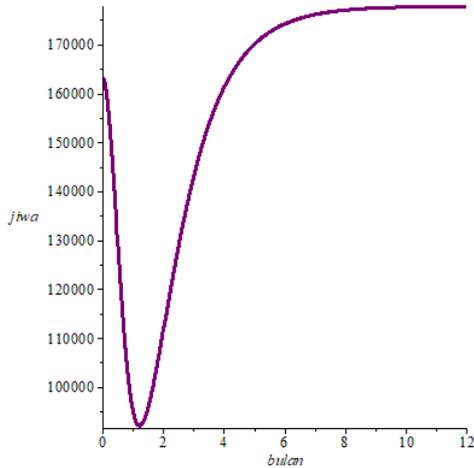
Gambar 4. Plot *infected* model SIR pada DBD

Berdasarkan Gambar 3 dapat dilihat bahwa kondisi di awal bulan populasi manusia *susceptible* tampak berada di puncak, namun seiring berjalannya waktu jumlah manusia *susceptible* mengalami penurunan bahkan semakin mendekati nilai nol. Hal ini disebabkan populasi manusia rentan masuk dalam populasi manusia *infected*. Sedangkan pada Gambar 4 untuk populasi manusia *infected* tampak mencapai puncak pada satu bulan pertama kemudian menurun mendekati nilai nol setelah bulan ke-3, ini dikarenakan manusia yang terinfeksi masuk pada populasi *recovered*.

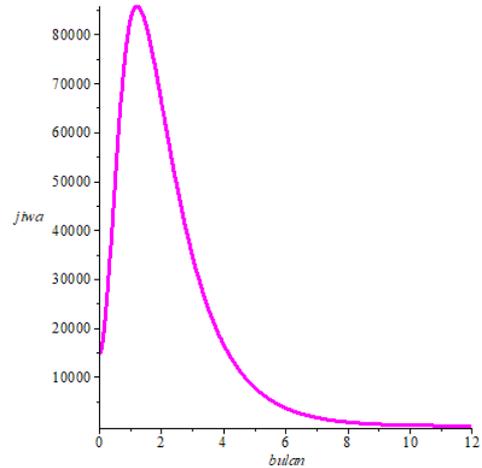


Gambar 5. Plot *Recovered* Model SIR pada DBD

Pada Gambar 5 menunjukkan bahwa pada awalnya individu yang sembuh mengalami peningkatan, namun setelah memasuki bulan ke-2 terlihat bahwa terjadi kestabilan. Hal ini dikarenakan individu yang sudah sembuh tidak dapat terinfeksi kembali.

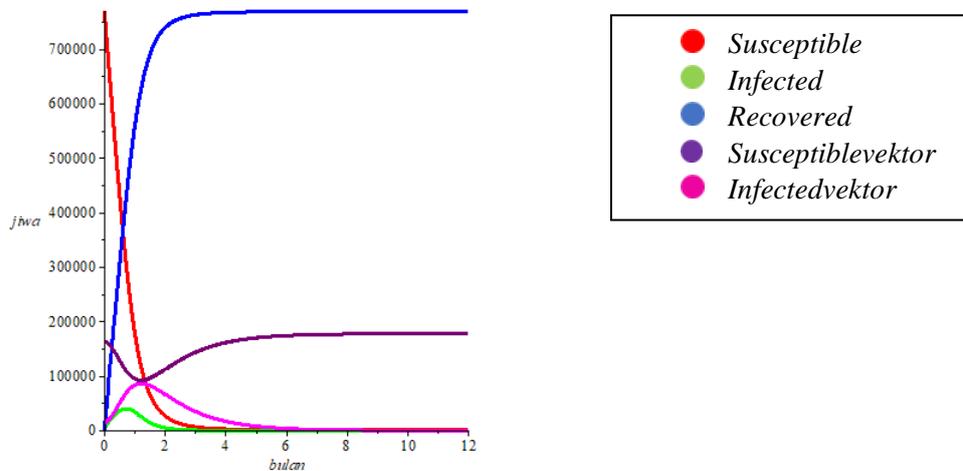


Gambar 6. Plot *Susceptible* untuk Populasi Nyamuk



Gambar 7. Plot *Infected* untuk Populasi Nyamuk

Berdasarkan Gambar 6 menunjukkan bahwa populasi nyamuk yang rentan pada bulan pertama awalnya terjadi peningkatan kemudian mengalami penurunan tetapi pada bulan ke-5 kembali terjadi peningkatan yang sangat signifikan, namun pada nilai 175.000 terjadi kestabilan. Hal ini dikarenakan dalam populasi nyamuk yang rentan perlahan terinfeksi. Sedangkan pada Gambar 7 untuk populasi nyamuk yang terinfeksi pada awalnya mengalami peningkatan dan mencapai jumlah maksimum menjelang bulan ke-2 dan mengalami penurunan setelah bulan ke-2 mendekati nol pada bulan ke-10 sampai bulan ke-12.



Gambar 8. Plot model SIR pada penyakit DBD

Berdasarkan Gambar 8 menunjukkan bahwa jumlah individu rentan mengalami penurunan bahkan hampir mendekati nilai nol. Selanjutnya menunjukkan bahwa pada awalnya jumlah individu yang terinfeksi mengalami kenaikan namun seiring berjalannya waktu jumlah individu terinfeksi mengalami penurunan. Kemudian jumlah individu sembuh pada awalnya mengalami peningkatan namun memasuki bulan ke-2 terlihat bahwa jumlahnya relatif sama atau cenderung stabil. Untuk kelompok vektor, pada kelompok *susceptible* pada awalnya mengalami penurunan namun memasuki nilai 100.000 mengalami peningkatan dan pada nilai 160.000 terjadi kestabilan. Sedangkan pada kelompok *infected* yang awalnya mengalami peningkatan hingga memasuki nilai 100.000 namun seiring berjalannya waktu terjadi penurunan mengalami kestabilan.

SIMPULAN

Berdasarkan uraian penelitian yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Formulasi model SIR untuk penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo adalah sebagai berikut.

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - \left(\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h} \right) S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{c_{vh} I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = p S_h + \gamma_h I_h - \mu_h R_h$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - \left(\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h} \right) S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{c_{hv} I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v$$

2. Model SIR dalam penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo memiliki titik keseimbangan endemik yaitu

$$\begin{aligned} E^1 &= (S_{v1}, I_{v1}, S_{h1}, I_{h1}) \\ &= \left(\frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h}}, \frac{c_{hv} I_h}{N_h \mu_v}, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h}}, \frac{c_{vh} I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right) \\ &= (176.951,57 ; 818,48 ; 889,01 ; 22.159,83) \end{aligned}$$

3. Simulasi model SIR dalam penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Purworejo menggunakan data penderita DBD di Kabupaten Purworejo. Berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa DBD bersifat endemik di Kabupaten Purworejo, artinya penyakit DBD tidak hilang di Kabupaten Purworejo. Namun, jumlah individu rentan dan terinfeksi cenderung mengalami penurunan atau mengalami kestabilan, sedangkan jumlah individu sembuh mengalami peningkatan dan juga stabil.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada koordinator Prodi Matematika dan seluruh Dosen Prodi Matematika yang telah memberikan ilmu dan bimbingan hingga terselesaikannya artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Campbell, S. L., & Haberman, R. (2008). *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Press.
- Desniawati, F. (2014). *Pelaksanaan 3M Terhadap Keberadaan Larva Aedes Aegypti di Wilayah Kerja Puskesmas Ciputat Kota Tangerang Selatan Bulan Mei-Juni Tahun 2014*. Jakarta: Program Studi Kesehatan Masyarakat Fakultas Kedokteran dan Ilmu Kesehatan Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta.
- Diekmann, O., & Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. New York: John Wiley and Son.
- Driessche, P. van den., & Watmough, J. (2002). *Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*. *Mathematical Biosciences* 180. Hlm. 29-48.
- Dumre, S. P., Shakya, G., & Na-Bangchang, K. (2015). *Modeling the Transmission dynamics of Dengue Fever: Implications of Temperature Effects*. *Journal of Infection and Public Health* 8(III). Hlm 284-289.

- Effendy. (2013). *Analisis Stabilitas Pada Penyebaran Penyakit DBD di Kabupaten Jember dengan Metode SIR Stokastik*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Fredlina, K. Q., Oka, T. B., & Dwipayana, I. M. E. (2012). *Model SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) untuk Penyebaran Penyakit Tuberculosis*. E-jurnal Matematika 1(I). Hlm 52-58.
- Hardiningsih, A. Y. (2010). *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik pada Waktu Diskrit*. <https://adoc.pub/kajian-model-epidemik-sir-deterministik-dan-stokastik-pada-w.html>. diakses pada 5 Januari 2023.
- Kamgang, J., & Ngwa, G. A. (2019). *Modeling the Spread of Dengue Fever with Differential Susceptibility*. Journal of Theoretical Biology 472. Hlm 45-52.
- Kementerian Kesehatan. (2016). *Demam Berdarah Dengue (DBD)*. <https://promkes.kemkes.go.id/?p=7443>. diakses pada 3 Januari 2023.
- Leleury, Z. A., Lesnussa, Y. A., & Bension, J. B., et al. (2017). *Analisis Stabilitas Model SIR (Susceptibles, Infected, Recovered) Pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Provinsi Maluku*. E-jurnal Matematika 7(II). Hlm 144-158.
- Liyanage, P., Singh, A., & Chaudhary, T. S., et al. (2017). *Modeling the Transmission Dynamics and Control of Dengue Fever in Sri Lanka*. BMC Public Health 17(S1). Hlm 401.
- Londah, S. A., Mongi, C. E., & Montolalu, C. E. J. C. (2019). *Penerapan Model SIR terhadap Perkembangan Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) di Kota Tomohon*. Jurnal Matematika dan Aplikasi 8(II). Hlm 114-120.
- Ma, Z., & Li, J. (2009). *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Nafiah, M. N. M. (2020). *Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Model SIR-SI dengan Struktur Usia dan Penyemprotan*. Jurnal Ilmiah Matematika 8(II).
- Olsder, G. J., & Woude, J. W. van der. (2004). *Mathematical System Theory*. Netherland: VVSD.
- Perko, Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical System (3rd ed)*. New York: Springer-Verlag, New York.
- Praditya, S. (2011). *Gambaran Sanitasi Lingkungan Rumah Tinggal dengan Kejadian Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) di Kecamatan Sumpersari Kabupaten Jember*. Jember: Bagian Kesehatan Lingkungan dan Kesehatan Keselamatan Kerja Fakultas Kesehatan Masyarakat Universitas Jember.
- Rokom. (2022). *Masuk Peralihan Musim, Kemenkes Minta Dinkes Waspada Lonjakan DBD*. <https://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/umum/20220923/3741130/masuk-peralihan-musim-kemenkes-minta-dinkes-waspada-lonjakan-dbd/>. diakses pada 3 Januari 2023.
- Ross, Shepley L. (1984). *Differential Equations (3rd ed)*. New York: Springer.
- Sari, I., & Tasman, H. (2014). *Model Epidemik SIR untuk Penyakit yang Menular Secara Horizontal dan Vertikal*. Makalah disajikan dalam Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII, ITS, Surabaya, 11-14 Juni 2014.
- Side, S., Alimuddin., & Bani, A. (2018). *Modifikasi Model SIR pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Kabupaten Bone*. E-jurnal Matematika 1(II). Hlm 169-182.
- Soleh, M., & Wartono. (2018). *Model SIR Penyebaran Demam Berdarah di Pekanbaru*. Jurnal Sains Matematika dan Statistika 4(II).
- Widowati & Sutimin. (2007). *Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro.