Jurnal Kajian dan Terapan Matematika
Volume 9, Edisi 2, Bulan Juli 2023, 86 - 96
http://journal.student.uny.ac.id/ojs/index.php/jktm

Analisis Kestabilan Titik Equilibrium dari Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD di DIY

Stability Analysis of the Equilibrium Point from the Mathematic Model of the Distribution of DHF in the Special Region of Yogyakarta

Qorry Pangestu, Prodi Matematika FMIPA UNY
Hartono*, Prodi Matematika FMIPA UNY
*e-mail: hartono@uny.ac.id

Abstrak
Tujuan dari penulisan tugas akhir skripsi ini adalah untuk mendeskripsikan dan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium pada model matematika penyebaran penyakit demam berdarah dengue (DBD) di Daerah Istimewa Yogyakarta. Tahapan yang dilakukan untuk menganalisis penyebaran penyakit DBD adalah membuat model matematika SIRS (*susceptible*, *infected*, *recovered*) penyebaran penyakit DBD, kemudian menentukan titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit dan menganalisa kestabilan titik ekulibrium model serta melakukan simulasi model matematika SIRS penyebaran penyakit DBD. Model matematika penyebaran penyakit DBD di Daerah Istimewa Yogyakarta yang diperoleh berupa sistem persamaan diferensial order satu nonlinear dengan 3 persamaan. Hasil analisis kestabilan titik ekuilibrium pada model matematika penyebaran penyakit DBD di Daerah Istimewa Yogyakarta diperoleh bahwa jika bilangan reproduksi dasar (R_0) pada kondisi $R_0 < 1$ titik equilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal sedangkan pada kondisi $R_0 > 1$ titik equilibrium endemik penyakit stabil asimtotik.
Kata kunci: model SIRS, DBD, kestabilan, titik ekuilibrium.

Abstract
The purpose of writing this thesis is to describe and analyze the stability of the equilibrium point in the mathematical model of the spread of dengue hemorrhagic fever (DHF) in the Special Region of Yogyakarta. The steps to analyze the spread of DHF are making a SIRS mathematical model (susceptible, infected, recovered) the spread of DHF, then determining the equilibrium point or equilibrium point free of disease and endemic disease and analyzing the stability of the equilibrium point of the model and simulating the SIRS mathematical model the spread of dengue fever. The mathematical model of the spread of DHF in the Special Region of Yogyakarta was obtained in the form of a system of nonlinear first order differential equations with 3 equations. The results of the analysis of the stability of the equilibrium point on the mathematical model of the spread of DHF in the Special Region of Yogyakarta, it is found that if the basic reproduction number (R_0) *is at the condition* $R_0 < 1$ *the disease-free equilibrium point is local asymptotically stable, while in the condition* $R_0 > 1$ *the endemic equilibrium point is the disease is asymptotically stable.*
***Keywords**: SIRS model, DHF, stability, equilibrium point.*

PENDAHULUAN

Penyakit DBD adalah penyakit yang disebabkan oleh virus dengue dari genus *Flavivirus*, famili *Flaviviride*. Virus dengue memiliki 4 serotipe, yaitu Den-1, Den-2, Den-3, dan Den-4. Serotipe Den-1 merupakan virus yang mudah menyebar dan tidak menyebabkan pengidapnya sakit parah. Serotipe Den-2 dan Den-3 merupakan virus yang menyebabkan pengidapnya sakit parah dan akan bermutasi dengan baik pada tubuh manusia sehingga akan sulit diatasi. Terkahir serotipe Den-4, yaitu virus yang paling sedikit ditemukan dan tidak bersifat ganas. Keempat jenis serotipe ini memiliki perbedaan yang khas pada genom. Perbedaan tersebut membuat vaksin yang mengandung keempat serotipe dengue dapat menyebabkan interaksi imunologi disertai fenomena perburukan penyakit.

Vaksin sangatlah diperlukan dalam usaha pencegahan terhadap penyebaran infeksi dengue karena imun tubuh saja tidaklah mampu mencegahnya. Namun hingga saat ini, belum ada vaksin yang efektif untuk penyakit DBD. Meskipun sudah banyak vaksin yang diuji untuk melawan virus dengue namun vaksin yang telah dibuat masih membutuhkan pengembangan yang efisien, sehingga memiliki efek rendah dan bisa menargetkan semua serotipe dari virus dengue. Di lain pihak, tubuh manusia mempunyai mekanisme membangun kekebalan pada virus dengue setelah pernah terinfeksi, namun kekebalan pada salah satu tipe belum tentu sama dengan tipe yang lain. Sehingga manusia yang pernah terinfeksi DBD dapat kembali terinfeksi DBD (Kementerian Kesehatan RI, 2018). Oleh karena itu, dengue menjadi salah satu jenis penyakit yang sulit diatasi dan dibeberapa negara, dengue merupakan jenis penyakit dengan penderita paling banyak.

Di Indonesia, khususnya di Propinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, dengue menjadi masalah kesehatan utama. Hal tersebut dikarenakan jumlah penderita yang semakin meningkat dan daerah penyebarannya semakin luas. Menurut KEMENKES (2019) pada tahun 2018, jumlah kasus DBD di provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta sebanyak 547 kasus dengan 3 kasus kematian. Pada tahun yang sama angka kesakitan atau incidence rate (IR) untuk wilayah Daerah Istimewa Yogyakarta menunjuk angka 14,36 per 100.000 penduduk dan angka kematian atau case fatality rate (CFR) menunjukkan angka 0,55 per 100.000 penduduk. Oleh karena itu, perlu usaha ekstra dan bantuan semua pihak di DIY agar penyebaran penyakit ini dapat diminimalisir.

Seorang matematikawan dapat melakukan analisis terhadap penyebaran penyakit dengue ini dengan menggunakan bantuan pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang ilmu di matematika yang mempresentasikan dan menjelaskan masalah pada dunia nyata menggunakan pernyataan matematika. Langkah pertama di dalam proses pemodelan matematika adalah menyatakan masalah dunia nyata ke dalam pengertian matematika, meliputi identifikasi variabel-variabel dan membentuk beberapa hubungan antara variabel-variabel. Kedua, membuat asumsi tentang model. Ketiga, memformulasikan persamaan untuk menyatakan hubungan antara variabel-variabel. Keempat, mencari solusi dari model. Solusi dari model matematika dapat diperoleh dengan cara analitik dan numerik. Selanjutnya menginterpretasikan hasil yang merupakan langkah terakhir untuk menghubungkan solusi persamaan matematika ke masalah nyata.

Kasus penyebaran penyakit dengue dapat dimodelkan secara matematis menjadi model SIRS (s*usceptible*, *infected*, *recovered*, *susceptible*). Model SIRS dibagi menjadi tiga kelompok yaitu *susceptible* (populasi rentan), *infected* (populasi terinfeksi), dan *recovered* (populasi sembuh). Side, S., Zaki, A., & Sari, N. melakukan penelitian pada tahun 2018 membahas mengenai model matematika SIRS untuk penyebaran DBD. Pembahasan di mulai dari membangun model matematika SIRS penyakit DBD, penentuan titik ekuilibrium, kemudian mencari analisis kestabilan titik ekuilibrium, menentukan nilai bilangan reproduksi dasar ($R0$), membuat simulasi model, dan menginterpretasikannya.

Pada penulisan skripsi ini memiliki perbedaan dengan penelitian yang dilakukan oleh Side, S., Zaki, A., & Sari, N pada tahun 2018. Pertama, pada penulisan yang dilakukan oleh Side, S., Zaki, A., & Sari, N vektor nyamuk dipertimbangkan, sedangkan dalam penulisan ini vector nyamuk diabaikan. Sehingga diharapkan, analisis untuk model SIRS di dalam skripsi ini lebih mudah untuk dilakukan. Kedua, pada penelitian Side, S., Zaki, A., & Sari, N menggunakan fungsi Lyapunov. Kelemahan dari metode Lyapunov adalah sulitnya mencari fungsi Lyapunov yang sesuai dan hanya dapat dilakukan dengan cara coba-coba oleh karena itu hasilnya belum tentu sesuai yang diharapkan. Namun, analisis pada penelitian ini dilakukan menggunakan metode kriteria Routh-Hurwitz yang pada prinsipnya hanya melihat posisi nilai eigen terhadap sumbu imajiner. Terakhir, tujuan dari penulisan skripsi ini adalah mencari pengaruh bilangan reproduksi terhadap kestabilan titik ekuilibrium, sedangkan penelitian Side, S., Zaki, A., & Sari, N bertujuan untuk menunjukan bahwa DBD berstatus endemik.

METODE

Penelitian ini menggunakan data sekunder yaitu jumlah kasus penderita penyakit (DBD) dan populasi manusia pada tahun 2000 dari Dinas Kesehatan dan Badan Pusat Statistika Provinsi DIY. Variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah: S, I, R, N. Adapun langkah-langkah yang ditempuh dalam penelitian ini yaitu:

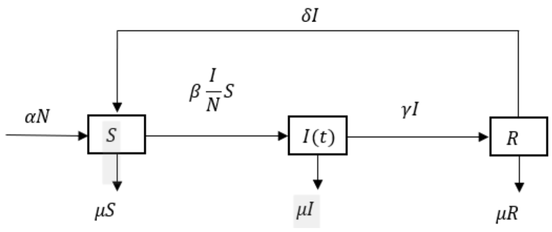
1. Melakukan Studi Pustaka,
2. Mengumpulkan Data,
3. Membuat Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD,
4. Mencari Titik Equlibrium Model,
5. Analisis Kestabilan Titik Equlibrium Model, dan
6. Menarik Kesimpulan

HASIL DAN PEMBAHASAN

Asumsi-Asumsi

1. Pada kenyataanya, seseorang akan tertular penyakit DBD melalui perantara nyamuk. Namun karena populasi nyamuk diabaikan (hanya ada populasi manusia), maka seseorang yang tertular DBD karena digigit nyamuk dianggap telah melakukan kontak langsung dengan penderita DBD.
2. Populasi penduduk bersifat tertutup. Sehingga pertumbuhan penduduk yang disebabkan selain kelahiran dan kematian diabaikan.
3. Populasi bersifat homogen yang berarti setiap individu memiliki kemungkinan yang sama untuk tertular penyakit DBD.
4. Setiap individu yang lahir diasumsikan rentan terhadap penyakit DBD.
5. Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi, yaitu penyakit DBD.
6. Kematian yang disebabkan oleh penyakit DBD sedikit sehingga diasumsikan tidak ada kematian karena penyakit DBD, dengan kata lain hanya ada kematian alami.
7. Manusia yang telah sembuh diasumsikan kebal sementara waktu, kemudian kembali menjadi individu susceptible.
8. Tingkat kelahiran, tingkat kematian, tingkat penularan, dan tingkat kesembuhan diasumsikan tetap.

Model Penyebaran Penyakit



Gambar 1. Diagram Alur

Pada Gambar 1 didapat sistem persamaan diferensial untuk model matematika penyebaran penyakit DBD sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{t}} &= \boldsymbol{\alpha N - \mu S - \beta \frac{I}{N} S + \delta R} \\ \frac{d\boldsymbol{I}}{d\boldsymbol{t}} &= \boldsymbol{\beta \frac{I}{N} S - \mu I - \gamma I} \\ \frac{d\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{t}} &= \boldsymbol{\gamma I - \mu R - \delta R} \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $N = S + I + R$.

Keterangan:
S : populasi manusia yang rentan terinfeksi
I : populasi manusia yang terinfeksi
R : populasi manusia yang sembuh
N : Jumlah populasi manusia
α : Laju kelahiran populasi
μ : Laju kematian alami
β : Laju penularan penyakit
γ : Laju kesembuhan
δ : Tingkat penurunan daya tahan tubuh

Dilakukan penyederhanaan notasi, sehingga sistem persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \alpha - \beta i s + \delta r - \alpha s \\ \frac{di}{dt} &= \beta i s - \gamma i - \alpha i \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - \delta r - \alpha r \end{aligned} \quad (2)$$

Titik equilibrium

Pada model matematika penyebaran penyakit DBD selanjutnya akan dicari titik equilibrium dengan cara membuat sistem tersebut dalam kondisi konstan terhadap waktu, yaitu kondisi dimana $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0$. Sistem persamaan (2) memiliki dua titik equilibrium, yaitu titik equilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan E_0 dan titik equilibrium endemik yang dinotasikan dengan E_1.

Sistem persamaan (2) akan mencapai titik equilibrium apabila $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0$. Sehingga sistem (2) dapat ditulis:

$$\alpha - \beta i s + \delta r - \alpha = 0 \quad (3)$$
$$\beta i s - \gamma i - \alpha i = 0 \quad (4)$$
$$\gamma i - \delta r - \alpha r = 0 \quad (5)$$

berdasarkan persamaan nomor (4) diperoleh:

$$\beta is - \gamma i - \alpha i = 0$$
$$(\beta s - \gamma - \alpha)i = 0 \quad (6)$$

Dari persamaan (6) diperoleh dua persamaan baru yaitu persamaan (7) dan (8).

$$\beta s - \gamma - \alpha = 0 \quad (7)$$
$$i = 0 \quad (8)$$

Titik equilibrium bebas penyakit

Titik equilibrium bebas penyakit didapat jika $i = 0$. Jika $i = 0$ maka semua individu tidak ada yang terinfeksi DBD sehingga tidak ada individu yang dapat menularkan penyakit DBD dan tidak ada individu yang sembuh dari penyakit DBD karena tidak ada individu yang terinfeksi penyakit DBD. Dengan nilai $i = 0$ dan $r = 0$ diperoleh:

$$\alpha - \beta is + \delta r - \alpha s = 0$$
$$\alpha - \alpha s = 0$$
$$\alpha s = \alpha$$
$$s = 1$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit pada model matematika penyebaran penyakit DBD di DIY sebagai berikut:

$$E_0 = (\bar{s}, \bar{\imath}, \bar{r}) = (1,0,0).$$

Titik equilibrium endemik

Titik equilibrium endemik didapat jika $s \neq 0$, $i \neq 0$ dan $r \neq 0$. Jika $s \neq 0$ maka terdapat individu rentan terhadap penyakit DBD. Jika i$\neq$ 0 maka terdapat individu yang terinfeksi DBD sehingga dapat menularkan penyakit DBD ke individu lain. Jika $r \neq 0$ maka terdapat individu yang sembuh dan dapat menjadi individu rentan terhadap penyakit DBD.
Berdasarkan persamaan (7), diperoleh:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{\gamma+\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} \quad (9)$$

berdasarkan persamaan (5), diperoleh:

$$\boldsymbol{i} = \frac{(\boldsymbol{\delta+\alpha})(\boldsymbol{\beta-\gamma-\alpha})}{(\boldsymbol{\delta+\gamma+\alpha})\boldsymbol{\beta}} \quad (10)$$

Subtitusi persamaan (9) dan (10) ke persamaan (3), diperoleh persamaan (11):

$$\boldsymbol{r} = \frac{(\boldsymbol{\beta-\gamma-\alpha})\boldsymbol{\gamma}}{(\boldsymbol{\delta+\gamma+\alpha})\boldsymbol{\beta}} \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan (9), (10), dan (11) diperoleh titik equilibrium endemik pada model matematika penyebaran penyakit DBD sebagai berikut:

$$E_1 = (\overline{s_1}, \overline{\imath_1}, \overline{r_1}) = \left(\frac{\gamma+\alpha}{\beta}, \frac{(\delta+\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)}{(\delta+\gamma+\alpha)\beta}, \frac{(\beta-\gamma-\alpha)\gamma}{(\delta+\gamma+\alpha)\beta}\right).$$

Bilangan reproduksi

Pada model, kelas terinfeksi adalah *infections* sehingga persamaan yang digunakan adalah persamaan (4).

$$\frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i - \alpha i$$

Maka diperoleh:

$F = \beta is$ dan $\mathrm{V} = -\gamma\mathrm{i} - \alpha\mathrm{i}$

Selanjutnya F dan V dilinearisasi, diperoleh hasil sebagai berikut:

$T = [\beta s]$ dan $\Sigma = [-\gamma - \alpha]$

Kemudian akan dicari Σ^{-1}, diperoleh:

$\Sigma^{-1} = \left[-\frac{1}{\gamma+\alpha}\right]$

next generation matrix diperoleh dari hasil perkalian T dan Σ sebagai berikut

$K = -T\Sigma^{-1} = -[\beta s]\left[-\frac{1}{\gamma+\alpha}\right]$

$K = \left[\frac{\beta s}{(\gamma+\alpha)}\right]$ (12)

Pada awal kemunculan penyakit, hampir semua populasi rentan, sehingga S dapat didekati dengan titik equilibrium bebas penyakit. Sehingga kita dapat mensubtitusi $E_0 = (\bar{s}, \bar{\imath}, \bar{r}) = (1,0,0)$ pada persamaan (12), diperoleh:

$\boldsymbol{K} = \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha})}\right]$ (13)

Dari persamaan (13) diperoleh nilai eigen $\frac{\beta}{(\gamma+\alpha)}$, sehingga bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem persamaan (2) sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta}{(\gamma + \alpha)}$$

Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

Langkah pertama melakukan linearisasi sistem persamaan linier yang muncul pada model DBD. Persamaan-persamaan yang digunakan dalam proses linierisasi adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{f(s,i,r) = \alpha - \beta i s + \delta r - \alpha s} \qquad (14)$$
$$\boldsymbol{g(s,i,r) = \beta i s - \gamma i - \alpha i} \qquad (15)$$
$$\boldsymbol{h(s,i,r) = \gamma i - \delta r - \alpha r} \qquad (16)$$

Hasil linearisasi persamaan (14) hingga persamaan (16) dilinearisasikan dan hasil liniearisasi merupakan matriks Jacobian (A).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial i} & \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial i} & \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial h}{\partial s} & \frac{\partial h}{\partial i} & \frac{\partial h}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya persamaan (14) hingga (16) disubstitusikan ke matriks A sehingga diperoleh matriks sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{-\beta i - \alpha} & \boldsymbol{-\beta s} & \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\beta i} & \boldsymbol{\beta s - \gamma - \alpha} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{-\delta - \alpha} \end{bmatrix}$$

Setelah mensubstitusi persamaan (13) hingga (16), substitusi E_0 pada matriks A sehingga diperoleh matriks A_0.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & \delta \\ 0 & \beta - \gamma - \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta - \alpha \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen λ matriks Jacobian dituliskan sebagai

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A_0})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (17)$$

dengan I adalah matriks identitas. Agar λ mempunyai nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan (17). Persamaan (17) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A_0}) = \boldsymbol{0} \qquad (18)$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian A_0 dapat dicari dengan persamaan (18), sehingga persamaan karakteristiknya untuk matriks A_0, yaitu:

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_0}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \alpha & \beta & -\delta \\ 0 & \lambda - \beta + \gamma + \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda + \delta + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$(\lambda + \alpha)\big((\lambda - \beta + \gamma + \alpha)(\lambda + \delta + \alpha)\big) = 0$$

Diperoleh:

- $\lambda_1 + \alpha = 0$
  $\lambda_1 = -\alpha$ (nilai λ_1 bernilai negatif)
- $\lambda_2 + \delta + \alpha = 0$
  $\lambda_2 = -\delta - \alpha$ (nilai λ_2 bernilai negatif)
- $\lambda_3 - \beta + \gamma + \alpha = 0$
  $\lambda_3 = \beta - \gamma - \alpha$
  jika $R_0 < 1$ maka nilai λ_3 bernilai negatif

Titik equilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik pada saat $R_0 < 1$, artinya pada saat waktu t menjadi tak hingga, maka semua kondisi pada model matematika penyebaran penyakit DBD di DIY sudah menuju titik kesetimbangan.

Kestabilan titik kesetimbangan dengan penyakit

Langkah pertama melakukan linearisasi sistem persamaan linier yang muncul pada model DBD. Persamaan-persamaan yang digunakan dalam proses linierisasi adalah persamaan (13) hingga persamaan (16). Selanjutnya persamaan (13) hingga (16) disubstitusikan ke matriks A.Selanjutnya, substitusi E_1 pada matriks A sehingga diperoleh matriks A_1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{(\delta + \alpha)(\beta - \gamma - \alpha)}{(\delta + \gamma + \alpha)} - \alpha & -\gamma - \alpha & \delta \\ \dfrac{(\delta + \alpha)(\beta - \gamma - \alpha)}{(\delta + \gamma + \alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta - \alpha \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen λ matriks Jacobian dituliskan sebagai

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A_1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (19)$$

dengan I adalah matriks identitas. Agar λ mempunyai nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan (19). Persamaan (19) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika:

$$\boldsymbol{det(\lambda I - A_1) = 0} \qquad (20)$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian A_1 dapat dicari dengan persamaan (20), sehingga persamaan karakteristiknya untuk matriks A_1, yaitu:

$$\det(\lambda I - A_1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \dfrac{(\delta+\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)}{(\delta+\gamma+\alpha)} + \alpha & \gamma+\alpha & -\delta \\ -\dfrac{(\delta+\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)}{(\delta+\gamma+\alpha)} & \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma & \lambda+\delta+\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda^3\alpha + \lambda^3\gamma + \lambda^3\delta + \lambda^2\alpha^2 + \lambda^2\alpha\beta + \lambda^2\alpha\gamma + 2\lambda^2\alpha\delta + \lambda^2\beta\delta + \lambda^2\delta^2 - \lambda\alpha^3 + 2\lambda\alpha^2\beta \\ - 2\lambda\alpha^2\gamma - \lambda\alpha^2\delta + \lambda\alpha\beta\gamma + 3\lambda\alpha\beta\delta - \lambda\alpha\gamma^2 - 3\lambda\alpha\gamma\delta + \lambda\beta\gamma\delta + \lambda\beta\delta^2 \\ - \lambda\gamma^2\delta - \lambda\gamma\delta^2 - \alpha^4 + \alpha^3\beta - 2\alpha^3\gamma - 2\alpha^3\delta + \alpha^2\beta\gamma + 2\alpha^2\beta\delta - \alpha^2\gamma^2 \\ - 3\alpha^2\gamma\delta - \alpha^2\delta^2 + \alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\delta^2 - \alpha\gamma^2\delta - \alpha\gamma\delta^2 = 0 \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \gamma + \delta \\ B &= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + 2\alpha\delta + \beta\delta + \delta^2 \\ C &= -\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 2\alpha^2\gamma - \alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\delta - \alpha\gamma^2 - 3\alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \beta\delta^2 - \gamma^2\delta - \gamma\delta^2 \\ D &= -\alpha^4 + \alpha^3\beta - 2\alpha^3\gamma - 2\alpha^3\delta + \alpha^2\beta\gamma + 2\alpha^2\beta\delta - \alpha^2\gamma^2 - 3\alpha^2\gamma\delta - \alpha^2\delta^2 + \alpha\beta\gamma\delta \\ &\quad + \alpha\beta\delta^2 - \alpha\gamma^2\delta - \alpha\gamma\delta^2 \end{aligned}$$

Didapatkan persamaan (21).

$$\boldsymbol{A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0} \qquad (21)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (12) akan stabil apabila

- $A > 0$
  $\alpha + \gamma + \delta > 0$ bernilai positif karena nilai $\alpha > 0, \gamma > 0$, dan $\delta > 0$
- $B > 0$
  $$\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + 2\alpha\delta + \beta\delta + \delta^2 > 0$$
  bernilai positif karena nilai $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, dan $\delta > 0$
- $D > 0$
  $\alpha(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma+\delta)(\beta-\alpha-\gamma) > 0$ bernilai positif karena nilai $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, dan $\delta > 0$ serta jika $R_0 > 1$ maka $\beta - \alpha - \gamma > 0$.
- $C - \frac{AD}{B} > 0$
  $$\begin{aligned} (\alpha+\delta)(\beta+\delta)\big(\alpha^2\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma(-\alpha-\gamma+\beta) + \gamma\delta(-\alpha+\beta-\gamma) \\ + (\alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta + \beta\delta^2 - \gamma\delta^2)\big) > 0 \end{aligned}$$
  bernilai positif karena nilai $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, dan $\delta > 0$ serta jika $R_0 > 1$ maka $\beta - \alpha - \gamma > 0$.

Titik equilibrium endemik penyakit (E_1) stabil asimtotik pada saat $R_0 > 1$, artinya pada saat waktu t menjadi tak hingga, maka semua kondisi pada model matematika penyebaran penyakit DBD di DIY sudah menuju titik kesetimbangan.

Simulasi Hasil

Pada model matematika (2) dilakukan suatu estimasi parameter pada setiap populasi untuk menggambarkan lebih jelas mengenai model matematika penyebaran penyakit DBD di DIY. Berdasarkan Dinas Kesehatan dan Badan Pusat Statistika, pada tahun 2000 populasi di Daerah Istimewa Yogyakarta berjumlah 3.121.701 jiwa dan jumlah individu yang terkenan penyakit DBD pada tahun 2000 adalah 492 jiwa.

Estimasi tingkat kematian (μ) dapat dihitung berdasarkan angka harapan hidup masyarakat pada satuan waktu tertentu. Menurut data dari Badan Pusat Statistika Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, angka harapan hidup di Daerah Istimewa Yogyakarta pada tahun 2000 adalah 72 . Jadi tingkat kematian individu adalah 0,013/tahun. Diasumsikan tingkat kelahiran (α) sama dengan tingkat kematian (μ) . Sehingga diperoleh tingkat kelahiran individu adalah α = 0,013/tahun.

Estimasi tingkat penularan penyakit DBD (β) dipengaruhi oleh peluang kontak antara nyamuk terinfeksi dan manusia rentan. Nilai ini adalah pembagian antara banyaknya populasi nyamuk yang terinfeksi virus dengue dengan banyaknya populasi manusia per satuan waktu. Asumsikan banyaknya nyamuk yang terinfeksi adalah 1.560.851 nyamuk. Jadi tingkat penularan penyakit DBD adalah 0,5/tahun. Estimasi tingkat kesembuhan (γ) populasi yang terinfeksi penyakit DBD diasumsikan sebesar 0.4/tahun.

Estimasi tingkat penurunan daya tahan tubuh (δ) individu yang telah sembuh diasumsikan 1/tahun. Sehingga model matematika penyebaran penyakit DBD di Daerah Istimewa Yogyakarta dapat ditulis dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang ada ke dalam persamaan (1), sehingga didapat persamaan:

$$\frac{ds}{dt} = 0.013 - 0.013s - 0.5si + r$$
$$\frac{di}{dt} = 0.5si - 0.413i$$
$$\frac{dr}{dt} = 0.4i - 1.013r$$

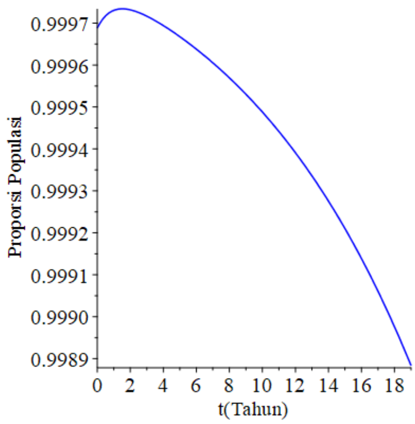
Dengan variabel S, I, R menurut Buku Profil Kesehatan 2000 adalah $S = 3120727, I = 492, R = 482$.

Berdasarkan nilai parameter tersebut, akan ditunjukkan bahwa kriteria *Routh Hurwitz* dari persamaan karakteristiknya untuk matriks A_1 sudah terpenuhi. Menurut kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (21) akan stabil apabila

- $A > 0$
$$1.413 > 0$$
- $B > 0$
$$1.537869 > 0$$
- $D > 0$
$$0.002 > 0$$
- $C - \frac{AD}{B} > 0$
$$0.219 > 0$$

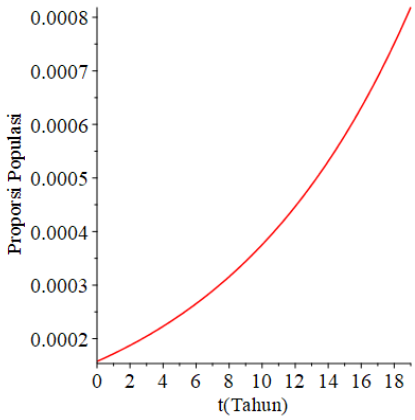
dapat dilihat bahwa semua kriteria Routh-Hurwitz sudah terpenuhi untuk parameter $\alpha = 0.013, \beta = 0.5, \gamma = 0.4$ dan $\delta = 1$.

Berdasarkan model matematika penyebaran penyakit DBD di Daerah Istimewa Yogyakarta dengan nilai awal $s_0 = 0.9996, i_0 = 0.0002, r_0 = 0.0002$diperoleh grafik simulasi pada Gambar 2.



Gambar 2. Plot Simulasi Kelas *Susceptible*

Berdasarkan hasil simulasi, Gambar 2, tentang perubahan jumlah populasi *susceptible* dengan nilai parameter $\mu = 0{,}013/\text{tahun}, \alpha = 0{,}013/\text{tahun}, \beta = 0.5/\text{tahun}, \gamma = 0.4/\text{tahun}$ dan $\delta = 1/\text{tahun}$ terlihat bahwa laju pada populasi *susceptible* mengalami kenaikan hingga $t = 1{,}51$ dan mengalami penurunan pada waktu $t = 1{,}51$. Hal ini terjadi karena populasi *susceptible* terinfeksi penyakt DBD dan memasuki kelas *infected*.



Gambar 3. Plot Simulasi Kelas *Infected*

Berdasarkan hasil simulasi, Gambar 3, terlihat bahwa laju pada populasi *infected* mengalami kenaikan hingga $t = 267$ dan stabil mulai $t = 267$. Hal ini disebabkan karena ada perpindahan dari kelas *susceptible* ke kelas *infected*.

Berarti berdasarkan simulasi dengan nilai awal $s_0 = 0.9996, i_0 = 0.0002,\ r_0 = 0.0002$ diperoleh nilai R_0 sebesar $1{,}208$. karena $R_0 > 1$ maka solusi menuju ke titik kesetimbangan endemik adalah $E_1 = (\overline{s_1}, \overline{i_1}, \overline{r_1}) = (0.826, 0.125, 0.049)$. Titik kesetimbangan endemik tersebut stabil asimtotik dan penyakit tersebut tidak hilang dari populasi serta menjadi endemik di Daerah Istimewa Yogyakarta serta nilai $R_0 > 1$ artinya setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit DBD kepada lebih dari satu individu baru, sehingga dapat menyebarkan penyakit yang lebih luas.

SIMPULAN

Simpulan

Model SIRS (Susceptible, Infected, Recovered, dan Susceptible) untuk model matematika penyebaran penyakit DBD di Daerah Istimewa Yogyakarta adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha N - \mu S - \beta \frac{I}{N} S + \delta R$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \mu I - \gamma I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R - \delta R$$

dengan $N = S + I + R$.

Pada analisis kestabilan titik equilibrium pada model matematika penyebaran penyakit demam berdarah dengue di Daerah Istimewa Yogyakarta diperoleh bahwa titik equilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik pada saat $R_0 < 1$ dan titik equilibrium endemik penyakit (E_1) stabil asimtotik pada saat $R_0 > 1$.

Saran

Pada penelitian selanjutnya, dapat menambahkan variabel-variabel pada penyebaran penyakit DBD di Daerah Istimewa Yogyakarta.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada koordinator dan seluruh Dosen Prodi Matematika yang telah memberikan ilmu dan bimbingan hingga terselesaikannya artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1995. Aljabar Linier Elementer Edisi ke-5. Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta.

Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Roberts, M. G. (2010). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. Journal of the Royal Society Interface, 7(47), 873–885.

Dinas Kesehatan DIY.(2016). Profil Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2015.Yogyakarta: Dinas Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta.

Dinas Kesehatan DIY.(2017). Profil Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2016.Yogyakarta: Dinas Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta.

Dinas Kesehatan DIY .(2018). Profil Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2017.Yogyakarta: Dinas Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta.

Dinas Kesehatan DIY.(2019). Profil Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun 2018.Yogyakarta: Dinas Kesehatan Daerah Istimewa Yogyakarta.

Dinas Kesehatan Kota Yogyakarta. (2015). Profil Kesehatan Tahun 2015 Kota Yogyakarta (Data Tahun 2014). Profil Kesehatan Tahun 2015 Kota Yogyakarta, 56, 1–198.

Hale, J.K & Kocak, H. (1996). Dynamics and Bifurcations. New York: Springer.

Kemenkes RI. (2017). Pedoman Demam Berdarah Dengue Indonesia. 12–38.

Kementerian Kesehatan RI. (2018). InfoDatin Situas Demam Berdarah Dengue. In Journal of Vector Ecology (Vol. 31, Issue 1, pp. 71–78).

Ndii, M.Z. 2018. Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik. Sleman: Deepublish.

Olsder, G.J & Woude J.W. van der. 2003. Mathematical Systems Theory. Netherland: VVSD.

Perko, L. 1991. Differential Equation and Dynamical System. New York: Springer.

Ross, S.L. (2010), Differential Equations. New York: Springer.

Röst, G., & Wu, J. (2008). Seir epidemiological model with varying infectivity and infinite delay. Mathematical Biosciences and Engineering, 5(2), 389–402.

Side, S., Alimuddin, & Bani, A. (2018). Modifikasi Model SIR pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah. Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, 1(2), 169–182

Supriatna, A. K., & Soewono, E. (2000). Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Berdarah. Jurnal Bionatura, 2(3), 1–13.