



**Analisis Kestabilan Model Matematika Pengaruh Vaksinasi terhadap Kasus Positif Covid-19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta**

*Stability Analysis of Mathematical Model the Effect of Vaccination on Positive Cases of Covid 19 in the Province of the Special Region of Yogyakarta*

Wiwit Wahyuningsih, Prodi Matematika FMIPA UNY  
Kus Prihantoso Krisnawan\*, Prodi Matematika FMIPA UNY  
\*e-mail: kuspk@uny.ac.id

**Abstrak**

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid-19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta menggunakan pemodelan matematika, menjelaskan kestabilan titik ekuilibrium, dan menjelaskan solusi numerik. Model yang digunakan yaitu  $SVI_1I_2R$  (*Susceptible, Vaccinated, Infected 1, Infected 2, Recovered*) dengan data penduduk Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta dari 3 Maret 2020 hingga 3 November 2021. Tahapan penelitian ini yaitu membentuk model  $SVI_1I_2R$ , menentukan titik ekuilibrium, menentukan bilangan reproduksi dasar, melakukan analisis titik ekuilibrium dan simulasi numerik. Hasil penelitian dari model  $SVI_1I_2R$  yang merupakan persamaan non linier diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik pada nilai parameter  $\alpha_2 = 0,0004$ ,  $\alpha_2 = 0,0005$ ,  $\alpha_2 = 0,0007$  dan  $\beta = 0,0030$ ,  $\beta = 0,0035$ ,  $\beta = 0,0040$  saat  $R_0 < 1$ . Sedangkan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik pada nilai parameter  $\alpha_2 = 0,0007$ ,  $\alpha_2 = 0,00010$ ,  $\alpha_2 = 0,0012$  dan  $\beta = 0,0028$ ,  $\beta = 0,0030$ ,  $\beta = 0,0032$  saat  $R_0 > 1$  sekitar 3 – 7. Artinya setiap individu terinfeksi dapat menginfeksi tiga hingga tujuh individu baru, sehingga kasus positif Covid – 19 akan terus bertambah dan menjadi endemik. Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa semakin besar laju vaksinasi ( $\beta$ ) dapat menekan kasus positif Covid-19.

**Kata kunci:** Covid – 19, model  $SVI_1I_2R$ , vaksinasi, analisis kestabilan, titik ekuilibrium.

**Abstract**

*The purpose of this study is to explain the effect of vaccination on positive cases of Covid-19 in the Special Region of Yogyakarta Province using mathematical modeling, explaining the stability of the equilibrium point, and explaining numerical solutions. The model used is  $SVI_1I_2R$  (*Susceptible, Vaccinated, Infected 1, Infected 2, Recovered*) with population data from the Special Region of Yogyakarta from March 3<sup>rd</sup>, 2020 to November 3<sup>rd</sup>, 2021. The stages of this research are forming the  $SVI_1I_2R$  model, determining the equilibrium point, determining the basic reproduction number, perform equilibrium point analysis and numerical simulations. The results of the research from the  $SVI_1I_2R$  model which is a non-linear equation obtained an asymptotically stable disease-free equilibrium point at parameter values  $\alpha_2 = 0,0004$ ,  $\alpha_2 = 0,0005$ ,  $\alpha_2 = 0,0007$  and  $\beta = 0,0030$ ,  $\beta = 0,0035$ ,  $\beta = 0,0040$  when  $R_0 < 1$ . While the endemic equilibrium point is asymptotically stable at the parameter values  $\alpha_2 = 0,0007$ ,  $\alpha_2 = 0,00010$ ,  $\alpha_2 = 0,0012$  and  $\beta = 0,0028$ ,  $\beta = 0,0030$ ,  $\beta = 0,0032$  when  $R_0 > 1$  around 3 – 7. This means that each infected individual can infect three to seven new individuals so that positive cases of Covid-19 will continue to grow and become endemic. From the results of the study, it can be concluded that a greater vaccination rate ( $\beta$ ) can suppress positive cases of Covid-19.*

**Keywords:** Covid – 19,  $SVI_1I_2R$  model, vaccination, stability analysis, basic reproduction number.

## PENDAHULUAN

*Coronavirus disease-19* (COVID-19) adalah salah satu virus yang menyebabkan penyakit pada manusia dan hewan. Penyakit ini menyebabkan gangguan saluran pernapasan sedang hingga berat. (Sari, et al 2021). Covid – 19 merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh *Severe Acute Respiratory Syndrome 2* (SARS-CoV-2) (Elfiah, et al 2021). Penyakit yang mudah menular ini, dapat menginfeksi banyak orang dengan cepat. Penyebaran virus dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita, melalui udara, batuk, atau bersin, dan benda yang pernah disentuh oleh penderita Covid – 19 (R, Elfi et al, 2020).

Pada tanggal 31 Desember 2019, dilaporkan terdapat 27 kasus pneumonia yang tidak diketahui penyebabnya di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, China. Pada 11 Februari 2020, WHO secara resmi menetapkan penyakit yang disebabkan oleh 2019-nCoV sebagai Penyakit Virus Corona 2019 (COVID-19). Pada 30 Januari 2020, WHO mendeklarasikan wabah COVID-19 di China sebagai Kedaruratan Kesehatan Masyarakat yang Meresahkan Dunia (*Public Health Emergency of International Concern*, PHEIC) ini menunjukkan bahwa COVID-19 adalah ancaman global dunia (Makmun, et al, 2020). Di dunia, jutaan orang telah terkonfirmasi COVID-19, 4,8 juta telah dinyatakan meninggal dunia dan 215 juta orang telah dinyatakan sembuh. Di Indonesia jumlah kasus Covid 19 cukup tinggi dengan jumlah terkonfirmasi positif sebanyak 4,2 juta orang dengan kasus kematian sebanyak 142 ribu orang dan banyak orang yang telah dinyatakan sembuh sebanyak 4 juta orang (Worldometers, 2021). Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta menjadi salah satu provinsi di Indonesia dengan angka positif Covid – 19 yang cukup tinggi. Per tanggal 3 November 2021, Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta menempati posisi ke enam dengan kasus positif Covid – 19 sebanyak 156.028 orang, total yang dinyatakan sembuh sebanyak 150.311 orang, dan sebanyak 5.253 orang dinyatakan meninggal (Corona Statistic, 2021).

Gejala umum infeksi Covid – 19 antara lain gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk, sesak napas. Pada kasus yang berat Covid – 19 dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernapasan akut, gagal ginjal, dan kematian. Tingkat keparahan pasien yang terinfeksi Covid – 19 dipengaruhi oleh daya tahan tubuh usia dan penyakit yang telah ada sebelumnya (Kororbid), seperti hipertensi, diabetes melitus, dll. (Nadia, 2021). Kororbid yang menjadi penyebab utama kematian pada pasien yang terinfeksi Covid – 19 antara lain hipertensi, diabetes melitus, dan obesitas (Rahayu et al., 2021). Tingkat penduduk Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta yang memiliki penyakit kororbid hipertensi yaitu sebesar 10,7% sedangkan yang memiliki penyakit kororbid diabetes sebesar 4,5%. (Dinas Kesehatan DIY, 2021) Tingkat penduduk yang memiliki penyakit kororbid obesitas dengan mengambil data Kota Yogyakarta yang diasumsikan sama untuk Provinsi DIY yaitu sebesar 2,26% (Dinas Kesehatan Yogyakarta, 2019)

Memperlambat penyebaran virus corona (COVID-19) adalah jalan keluar mengakhiri pandemi. Masyarakat dan pihak non-pemerintah dapat berpartisipasi dalam berbagai bentuk kerelawanan dalam penanggulangan bencana dan pengurangan risiko. Vaksinasi bagi seluruh rakyat Indonesia merupakan salah satu upaya pemerintah Indonesia dalam memerangi Covid 19 (Rahayu et al, 2021). Program vaksinasi COVID-19 di Indonesia mulai dilaksanakan pada 13 Januari 2021 diharapkan dapat mempercepat timbulnya kekebalan kelompok (*herd immunity*) yang nantinya berdampak pada penurunan jumlah kasus positif Covid 19. Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) menjelaskan bahwa kinerja vaksin dapat dilihat dari tiga pengukuran yaitu melalui efikasi, efektivitas, dan dampak vaksin (Nasir, et al, 2021).

Penyebaran penyakit menular dapat dimodelkan dengan model matematika. Pemodelan matematika adalah bidang matematika yang bertujuan untuk mempresentasikan dan menjelaskan sistem atau masalah fisik pada dunia nyata dalam pernyataan matematis sehingga diperoleh pemahaman masalah dunia nyata tersebut menjadi lebih tepat (Prayudi, 2006). Model SIR merupakan model dasar dalam model epidemiologi yang banyak digunakan dan

dikembangkan dalam pemodelan penyakit menular atau sejenisnya.(Kasbawati, 2011). Pada model SIR belum terdapat variabel yang menunjukkan kelompok individu yang sudah divaksinasi. Dalam suatu model epidemi terdapat titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar yang dapat ditentukan. Selanjutnya dari titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar tersebut dapat dianalisis kestabilannya. Menurut Sinuhaji Ferdinand. (2015) syarat dari kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), yaitu nilai yang menentukan ada atau tidaknya penyebaran infeksi penyakit pada suatu populasi.

Dalam pemodelan kasus Covid-19 dilakukan pengembangan dari model SIR yaitu dengan menambahkan variabel *Vaccinated* ( $V$ ). Variabel *Vaccinated* ( $V$ ) ditambahkan sebagai kelompok individu yang telah divaksinasi. Kemudian dikembangkan pula variabel *Infected* ( $I$ ) menjadi *Infected 1* ( $I_1$ ) sebagai kelompok individu yang terinfeksi Covid – 19 dengan penyakit komorbid dan *Infected 2* ( $I_2$ ) sebagai kelompok individu yang terinfeksi Covid – 19 dengan gejala ringan. Untuk itu dipilih model  $SVI_1I_2R$  yaitu pengembangan dari model SIR.

## METODE

Penelitian model matematika pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta merupakan jenis penelitian dengan pendekatan kuantitatif. Dalam penelitian ini, data yang digunakan antara lain jumlah penduduk yang terkonfirmasi positif, data penduduk yang sembuh dari Covid 19, data penduduk yang dinyatakan meninggal akibat Covid 19 dan data penduduk yang sudah melakukan vaksinasi di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahapan. Penelitian diawali dengan *study literatur* dengan mencari referensi sebanyak mungkin untuk mencari informasi mengenai penelitian yang telah dilakukan sebelumnya dan mencari informasi mengenai perkembangan Covid – 19, khususnya di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Selanjutnya membuat asumsi terkait dengan kondisi yang sebenarnya terjadi dan membuat model  $SVI_1I_2R$  yang sesuai dengan beberapa variabel dan parameter yang digunakan. Pada tahap selanjutnya, mencari titik ekuilibrium dan mencari bilangan reproduksi dasar dari model yang telah dibuat. Titik ekuilibrium yang telah diperoleh kemudian dianalisis kestabilannya lalu langkah selanjutnya melakukan simulasi numerik pada model yang telah dibuat dengan menggunakan *software Maple 2018*. Hasil perhitungan yang diperoleh kemudian dapat ditarik sebuah kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Hasil

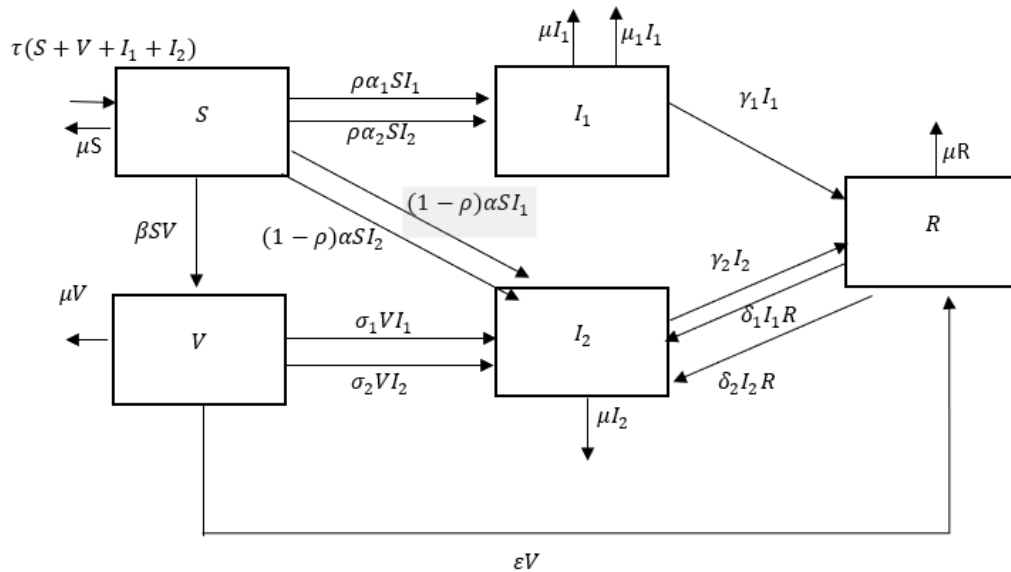
#### 1. Pembentukan Model

Model  $SVI_1I_2R$  pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta terdiri dari 5 kompartemen yaitu *Susceptible* ( $S$ ), *Vaccinated* ( $V$ ), *Infected 1* ( $I_1$ ), *Infected 2* ( $I_2$ ), dan *Recovered* ( $R$ ) dengan asumsi yang sangat diperlukan di dalam memodelkan kasus penyebaran penyakit ini, yaitu

- Penyakit mengakibatkan kematian.
- Penularan terjadi melalui kontak langsung dari seseorang yang terinfeksi baik melalui udara, batuk, atau bersin dan benda yang pernah disentuh oleh penderita Covid 19.
- Individu yang terinfeksi Covid-19 dan memiliki penyakit komorbid akan memperparah gejala Covid-19 sehingga dapat menyebabkan kematian akibat Covid-19.
- Vaksinasi dilakukan sebanyak 2 kali.
- Terjadi interaksi antara individu yang telah melakukan vaksinasi dan individu rentan sehingga individu rentan melakukan vaksinasi.
- Individu yang telah melakukan vaksinasi dapat kembali terinfeksi Covid-19 dengan gejala yang lebih ringan

- g. Individu yang telah sembuh dari virus Covid 19 dapat kembali terinfeksi Covid-19 dengan gejala yang lebih ringan
- h. Tidak terjadi imigrasi dan emigrasi dalam populasi.
- i. Individu terinfeksi dengan gejala atau mempunyai komorbid akan langsung diisolasi. Individu ini hanya akan melakukan kontak dengan tenaga Kesehatan.
- j. Semua tenaga kesehatan telah divaksinasi.

Berdasarkan asumsi tersebut model  $SVI_1I_2R$  pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid-19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta dapat digambarkan dalam diagram alir berikut.



**Gambar 1.** Diagram Model  $SVI_1I_2R$  Pengaruh Vaksinasi Terhadap Kasus Positif Covid-19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta

Model  $SVI_1I_2R$  pada Gambar 1 dapat dinyatakan dalam sistem diferensial *nonlinier* berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \tau(S + V + I_1 + I_2) - \alpha_1SI_1 - \alpha_2SI_2 - \beta SV - \mu S \tag{1}$$

$$\frac{dV}{dt} = \beta SV - \sigma_1VI_1 - \sigma_2VI_2 - \varepsilon V - \mu V \tag{2}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \rho\alpha_1SI_1 + \rho\alpha_2SI_2 - \gamma_1I_1 - \mu_1I_1 - \mu I_1 \tag{3}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (1-\rho)\alpha_1SI_1 + (1-\rho)\alpha_2SI_2 + \sigma_1VI_1 + \sigma_2VI_2 + \delta I_1 + \delta I_2 - \gamma_2I_2 - \mu I_2 \tag{4}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1I_1 + \gamma_2I_2 + \varepsilon V - \delta_1I_1R - \delta_2I_2R - \mu R \tag{5}$$

dengan variabel dan parameter model yang dideskripsikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Daftar Variabel dan Parameter Model  $SVI_1I_2R$  Pengaruh Vaksinasi Terhadap Kasus Positif Covid – 19 di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta

No	Variabel / Parameter	Definisi	Syarat
1.	$N(t)$	Jumlah populasi pada waktu ke – t	$N(t) \geq 0$
2.	$S(t)$	Jumlah individu rentan pada waktu ke - t	$S(t) \geq 0$
3.	$V(t)$	Jumlah individu yang telah melakukan vaksinasi pada waktu t	$V(t) \geq 0$
4.	$I_1(t)$	Jumlah individu yang telah terinfeksi virus Covid 19 dan memiliki penyakit komorbid atau memiliki gejala berat pada waktu ke – t	$I_1(t) \geq 0$
5.	$I_2(t)$	Jumlah individu yang telah terinfeksi virus Covid 19 dan memiliki gejala ringan atau tanpa gejala pada waktu ke – t	$I_2(t) \geq 0$
6.	$R(t)$	Jumlah individu yang telah sembuh pada waktu ke – t	$R(t) \geq 0$
7.	$\alpha$	Laju penularan Covid – 19	$\alpha \geq 0$
8.	$\beta$	Laju vaksinasi	$\beta \geq 0$
9.	$\gamma$	Laju kesembuhan setelah terinfeksi Covid – 19	$\gamma \geq 0$
10.	$\varepsilon$	Laju individu yang telah melakukan vaksinasi yang berpindah ke kelas <i>Recovered</i>	$\varepsilon \geq 0$
11.	$\mu$	Laju kematian alami	$\mu \geq 0$
12.	$\tau$	Laju kelahiran populasi	$\tau \geq 0$
13.	$\mu_1$	Laju kematian yang disebabkan Covid – 19	$\mu_1 \geq 0$
14.	$\delta$	Laju penularan Covid dari Kelas <i>Recovered</i> ( $R$ ) menuju Kelas <i>Infected 2</i> ( $I_2$ )	$\delta \geq 0$
15.	$\sigma$	Laju individu yang telah melakukan vaksinasi berpindah ke dalam kelas <i>Infected 2</i> ( $I_2$ )	$\sigma \geq 0$
16.	$\rho$	Laju individu terinfeksi yang memiliki penyakit komorbid	$\rho \geq 0$

Dengan asumsi laju penularan  $\alpha_1 = 0$ , laju perpindahan dari kelas *Recovered* ( $R$ ) diasumsikan  $\delta_1 = 0$ , dan  $\delta_2 = 0$ , laju kesembuhan diasumsikan sama yaitu  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , dan variabel *Recovered* ( $R$ ) diabaikan dari sistem sehingga sistem menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \tau(S + V + I_1 + I_2) - \alpha_2SI_2 - \beta SV - \mu S \tag{6}$$

$$\frac{dV}{dt} = \beta SV - \sigma_1VI_1 - \sigma_2VI_2 - \varepsilon V - \mu V \tag{7}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \rho\alpha_2SI_2 - \gamma I_1 - \mu_1I_1 - \mu I_1 \tag{8}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (1 - \rho)\alpha_2SI_2 + \sigma_1VI_1 + \sigma_2VI_2 - \gamma I_2 - \mu I_2 \tag{9}$$

## 2. Titik Ekuilibrium

Model  $SVI_1I_2R$  pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 memiliki 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik dari persamaan (6) – (9) terjadi jika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$\tau(S + V + I_1 + I_2) - \alpha_2 SI_2 - \beta SV - \mu S = 0 \tag{10}$$

$$\beta SV - \sigma_1 VI_1 - \sigma_2 VI_2 - \varepsilon V - \mu V = 0 \tag{11}$$

$$\rho \alpha_2 SI_2 - \gamma I_1 - \mu_1 I_1 - \mu I_1 = 0 \tag{12}$$

$$(1 - \rho) \alpha_2 SI_2 + \sigma_1 VI_1 + \sigma_2 VI_2 - \gamma I_2 - \mu I_2 = 0 \tag{13}$$

a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_1$ ) diperoleh ketika dalam populasi tidak terdapat individu yang terinfeksi sehingga  $I_1 = 0$  dan  $I_2 = 0$ . Dengan menyelesaikan Sistem (10) – (13) diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai berikut

$$E_1 = (S, V, I_1, I_2) = \left( \frac{\varepsilon + \mu}{\beta}; \frac{(\varepsilon + \mu)(\tau - \mu)}{\beta(-\tau + \varepsilon + \mu)}; 0; 0 \right) \tag{14}$$

b. Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik ( $E_2$ ) diperoleh ketika terdapat individu dalam populasi yang terinfeksi Covid 19 sehingga kelas *Infected 1* ( $I_1$ ) dan *Infected 2* ( $I_2$ ) tidak sama dengan nol. Dengan menyelesaikan Sistem (10) – (13) diperoleh titik ekuilibrium endemik sebagai berikut

$$E_2 = (S, V, I_1, I_2) =$$

$$S = \frac{1}{2\rho\alpha_2(\beta(\gamma+\mu_1+\mu-\tau)+\sigma_1(\mu-\tau))} (-\varepsilon\tau\alpha_2 + \gamma\tau\alpha_2 + \rho\tau\alpha_2\mu_1 - \beta\gamma\mu_1 + \beta\tau\mu_1 - \beta\mu_1\mu + \varepsilon\gamma\alpha_2 + \varepsilon\mu\alpha_2 + \varepsilon\alpha_2\mu_1 - \gamma\tau\alpha_2 + \gamma\tau\sigma_2 + \gamma\mu\alpha_2 - \gamma\mu\sigma_2 - \tau\mu\alpha_2 + \tau\mu\sigma_2 - \tau\alpha_2\mu_1 + \tau\mu_1\sigma_2 - \beta\gamma^2 + \beta\gamma\tau - 2\beta\gamma\mu + \beta\tau\mu - \beta\mu^2 + \mu^2\alpha_2 - \mu^2\sigma_2 + \mu\alpha_2\mu_1 - \mu\mu_1\sigma_2 + (6\beta\gamma\mu^3\sigma_2 - 2\beta\tau^2\mu^2\alpha_2 + 2\beta\tau^2\mu^2\sigma_2 - 2\beta\tau^2\alpha_2\mu_1^2 + 2\beta\tau^2\mu_1^2\sigma_2 + 4\beta\tau\mu^3\alpha_2 - 4\beta\tau\mu^3\sigma_2 - 4\beta\mu^3\alpha_2\mu_1 + 4\beta\mu^3\mu_1\sigma_2 - 2\beta\mu^2\alpha_2\mu_1^2 + 2\beta\mu^2\mu_1^2\sigma_2 + 2\varepsilon^2\gamma\mu\alpha_2^2 + 2\varepsilon^2\gamma\alpha_2^2\mu_1 - 2\varepsilon\gamma\tau^2\alpha_2^2 + 2\varepsilon\gamma^2\mu\alpha_2^2 + 4\varepsilon\gamma\mu^2\alpha_2^2 - 2\varepsilon\tau\mu^2\alpha_2^2 - 2\varepsilon\tau\alpha_2^2\mu_1^2 - 2\varepsilon\mu^3\alpha_2\sigma_2 + 4\varepsilon\mu^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\varepsilon\mu\alpha_2^2\mu_1^2 - 2\gamma^2\tau^2\alpha_2\sigma_2 - 2\gamma^2\tau\mu\alpha_2^2 - 2\gamma^2\tau\mu\sigma_2^2 - 2\gamma^2\mu^2\alpha_2\sigma_2 + 2\gamma\tau^2\mu\alpha_2^2 + 2\gamma\tau^2\mu\sigma_2^2 + 2\gamma\tau^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\gamma\tau^2\mu_1\sigma_2^2 - 4\gamma\tau\mu^2\alpha_2^2 - 4\gamma\tau\mu^2\sigma_2^2 - 4\gamma\mu^3\alpha_2\sigma_2 + 2\gamma\mu^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\gamma\mu^2\mu_1\sigma_2^2 - 2\tau^2\mu^2\alpha_2\sigma_2 + 2\tau^2\mu\alpha_2^2\mu_1 + 2\tau^2\mu\mu_1\sigma_2^2 - 2\tau^2\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 + 4\tau\mu^3\alpha_2\sigma_2 - 4\tau\mu^2\alpha_2\mu_1 - 4\tau\mu^2\mu_1\sigma_2^2 - 2\tau\mu\alpha_2^2\mu_1^2 - 2\tau\mu\mu_1^2\sigma_2^2 - 4\mu^3\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 2\mu^2\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 + \varepsilon^2\rho^2\tau^2\alpha_2^2 + \gamma^2\rho^2\tau^2\alpha_2^2 + \rho^2\tau^2\alpha_2^2\mu_1^2 - 2\gamma^2\rho\tau^2\alpha_2^2 - 2\rho\tau^2\alpha_2^2\mu_1^2 - 6\beta^2\gamma^2\tau\mu - 4\beta^2\gamma^2\tau\mu_1 + 6\beta^2\gamma^2\mu\mu_1 + 2\beta^2\gamma\tau^2\mu + 2\beta_2\gamma\tau^2\mu_1 - 6\beta^2\gamma\tau\mu^2 - 2\beta^2\gamma\tau\mu_1^2 + 6\beta^2\gamma\mu^2\mu_1 + 2\beta^2\gamma\mu\mu_1^2 + 2\beta^2\tau^2\mu\mu_1 - 4\beta^2\tau\mu^2\mu_1 - 2\beta^2\tau\mu\mu_1^2 - 2\beta\varepsilon\gamma^3\alpha_2 - 2\beta\varepsilon\mu^3\alpha_2 + 2\beta\gamma^3\tau\alpha_2 - 2\beta\gamma^3\tau\sigma_2 - 2\beta\gamma^3\mu\alpha_2 + 2\beta\gamma^3\mu\sigma_2 - 2\beta\gamma^2\tau^2\alpha_2 + 2\beta\gamma^2\tau^2\sigma_2 - 6\beta\gamma^2\mu^2\alpha_2 + 6\beta\gamma^2\mu^2\sigma_2 - 6\beta\gamma\mu^3\alpha_2 - 2\beta^2\gamma^3\tau + 4\beta^2\gamma^3\mu + 2\beta^2\gamma^3\mu_1 + \beta^2\gamma^2\tau^2 + 6\beta^2\gamma^2\mu^2 + \beta^2\gamma^2\mu_1^2 + 4\beta^2\gamma\mu^3 + \beta^2\tau^2\mu^2 + \beta^2\tau^2\mu_1^2 - 2\beta^2\tau\mu^3 + 2\beta^2\mu^3\mu_1 + \beta^2\mu^2\mu_1^2 - 2\beta\mu^4\alpha_2 + 2\beta\mu^4\sigma_2 + \varepsilon^2\gamma^2\alpha_2^2 + \varepsilon^2\mu^2\alpha_2^2 + \varepsilon^2\alpha_2^2\mu_1^2 + 2\varepsilon\mu^3\alpha_2^2 + \gamma^2\tau^2\alpha_2^2 + \gamma^2\tau^2\sigma_2^2 + \gamma^2\mu^2\alpha_2^2 + \gamma^2\mu^2\sigma_2^2 + 2\gamma\mu^3\alpha_2^2 + 2\gamma\mu^3\sigma_2^2 + \tau^2\mu^2\alpha_2^2 + \tau^2\mu^2\sigma_2^2 + \tau^2\alpha_2^2\mu_1^2 + \tau^2\mu_1^2\sigma_2^2 - 2\tau\mu^3\alpha_2^2 - 2\tau\mu^3\sigma_2^2 - 2\mu^4\alpha_2\sigma_2 + 2\mu^3\alpha_2^2\mu_1^2 + 2\mu^3\mu_1\sigma_2^2 + \mu^2\alpha_2^2\mu_1^2 + \mu^2\mu_1^2\sigma_2^2 + \beta^2\gamma^4 + \beta^2\mu^4 + \mu^4\alpha_2^2 + \mu^4\sigma_2^2 + 4\beta\gamma^2\rho\tau\alpha_2\mu_1 - 2\beta\gamma\rho\tau^2\mu\alpha_2 + 2\beta\gamma\rho\tau^2\mu^2\alpha_2 + 2\beta\gamma\rho\tau\alpha_2\mu_1^2 + 2\beta\rho\tau^2\mu\alpha_2\mu_1 - 2\beta\rho\tau\mu^2\alpha_2\mu_1 - 2\beta\rho\tau\mu\alpha_2\mu_1^2 - 2\varepsilon\gamma\rho\tau^2\alpha_2\sigma_2 + 4\varepsilon\gamma\rho\tau\alpha_2^2\mu_1^2 - 2\varepsilon\rho\tau^2\mu\alpha_2\sigma_2 - 2\varepsilon\rho\tau^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 + 2\varepsilon\rho\tau\mu^2\alpha_2\sigma_2 - 2\gamma^2\rho\tau\alpha_2\sigma_2 + 2\gamma\rho\tau^2\mu\alpha_2\sigma_2 + 4\gamma\rho\tau^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 2\gamma\rho\tau\mu^2\alpha_2\sigma_2 + 4\gamma\rho\tau\mu\alpha_2^2\mu_1 + 2\rho\tau^2\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 2\rho\tau\mu^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 2\rho\tau\mu\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 + 4\beta\varepsilon\gamma\tau\mu\alpha_2 + 4\beta\varepsilon\gamma\tau\alpha_2\mu_1 - 8\beta\varepsilon\gamma\mu\alpha_2\mu_1 + 4\beta\varepsilon\tau\mu\alpha_2\mu_1 + 12\beta\gamma\tau\mu\alpha_2\mu_1 - 12\beta\gamma\tau\mu_1\sigma_2 + 4\varepsilon\gamma\tau\mu\alpha_2\sigma_2 + 4\varepsilon\gamma\tau\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 4\varepsilon\gamma\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 + 4\varepsilon\tau\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 + 8\gamma\tau\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 4\beta\varepsilon\rho\tau\alpha_2\mu_1^2 + 4\varepsilon\gamma\rho\tau^2\alpha_2\sigma_1 + 4\varepsilon\rho\tau^2\mu\alpha_2\sigma_1 + 4\varepsilon\rho\tau^2\alpha_2\mu_1\sigma_1 - 4\varepsilon\rho\tau\mu^2\alpha_2\sigma_1 + 4\gamma^2\rho\tau\mu\alpha_2\sigma_1 - 4\gamma\rho\tau^2\mu\alpha_2\sigma_1 - 4\gamma\rho\tau^2\alpha_2\mu_1\sigma_1 + 4\gamma\rho\tau\mu^2\alpha_2\sigma_1 - 2\beta\varepsilon\gamma^2\rho\tau\alpha_2 + 2\beta\varepsilon\gamma\rho\tau^2\alpha_2 + 2\beta\varepsilon\rho\tau^2\mu\alpha_2 + 2\beta\varepsilon\rho\tau^2\alpha_2\mu_1 - 2\beta\varepsilon\rho\tau\mu^2\alpha_2 + 4\beta\gamma^2\rho\tau\mu\alpha_2 - 4\beta\varepsilon\gamma\rho\tau\mu\alpha_2 -$$

$$\begin{aligned}
 &6\beta\epsilon\gamma\tau\alpha_2\mu_1 - 6\beta\epsilon\tau\mu\alpha_2\mu_1 + 2\beta\gamma\tau\mu\alpha_2\mu_1 + 2\epsilon\gamma\tau\mu\alpha_2\sigma_2 + 2\epsilon\tau\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 - \\
 &4\gamma\tau\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 4\epsilon\gamma\tau\mu\alpha_2\sigma_1 - 4\epsilon\tau\mu\alpha_2\mu_1\sigma_1 + 4\gamma\tau\mu\alpha_2\mu_1\sigma_1 + 2\beta\gamma\tau\alpha_2\mu_1^2 - \\
 &2\beta\gamma\tau\mu_1^2\sigma_2 - 8\beta\gamma\mu^2\alpha_2\mu_1 + 8\beta\gamma\mu^2\mu_1\sigma_2 - 2\beta\gamma\mu\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 - 4\beta\tau^2\mu\alpha_2\mu_1 + 4\beta\tau^2\mu\mu_1\sigma_2 + \\
 &8\beta\tau\mu^2\alpha_2\mu_1 - 8\beta\tau\mu^2\mu_1\sigma_2 + 4\beta\tau\mu\alpha_2\mu_1^2 - 4\beta\tau\mu\mu_1^2\sigma_2 + 2\epsilon\gamma^2\tau\alpha_2\sigma_2 - 2\epsilon\gamma^2\mu\alpha_2\sigma_2 - \\
 &4\epsilon\gamma\tau\mu\alpha_2^2 - 4\epsilon\gamma\tau\alpha_2^2\mu_1 - 4\epsilon\gamma\mu^2\alpha_2\sigma_2 + 4\epsilon\gamma\mu\alpha_2^2\mu_1 + 2\epsilon\tau\mu^2\alpha_2\sigma_2 - 4\epsilon\tau\mu\alpha_2^2\mu_1 + \\
 &2\epsilon\tau\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 - 4\epsilon\mu^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 2\epsilon\mu\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 + 4\gamma^2\tau\mu\alpha_2\sigma_2 - 4\gamma\tau^2\mu\alpha_2\sigma_2 - 4\gamma\tau^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 + \\
 &8\gamma\tau\mu^2\alpha_2\sigma_2 - 4\gamma\tau\mu\alpha_2^2\mu_1 - 4\gamma\tau\mu\mu_1\sigma_2^2 - 4\gamma\mu^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 - 4\tau^2\mu\alpha_2\mu_1\sigma_2 + 8\tau\mu^2\alpha_2\mu_1\sigma_2 + \\
 &4\tau\mu\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 - 4\gamma^2\rho\tau^2\alpha_2\sigma_1 - 2\epsilon\gamma\rho^2\tau^2\alpha_2^2 - 2\epsilon\rho^2\tau^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\gamma\rho^2\tau^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\beta\gamma^3\rho\tau\alpha_2 - \\
 &2\beta\gamma^2\rho\tau^2\alpha_2 + 2\beta\rho\tau^2\alpha_2\mu_1 - 2\epsilon^2\gamma\rho\tau\alpha_2^2 - 2\epsilon^2\rho\tau\mu\alpha_2^2 - 2\epsilon^2\rho\tau\alpha_2^2\mu_1 + 2\epsilon\gamma^2\rho\tau\alpha_2^2 + \\
 &2\epsilon\gamma\rho\tau^2\alpha_2^2 + 2\epsilon\rho\tau^2\mu\alpha_2^2 + 2\epsilon\rho\tau^2\alpha_2^2\mu_1 - 2\epsilon\rho\tau\mu^2\alpha_2^2 + 2\epsilon\rho\tau\alpha_2^2\mu_1^2 + 2\gamma^2\rho\tau^2\alpha_2\sigma_2 + \\
 &2\gamma^2\rho\tau\mu\alpha_2^2 - 2\gamma\rho\tau^2\mu\alpha_2^2 - 4\gamma\rho\tau^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\gamma\rho\tau\mu^2\alpha_2^2 - 2\rho\tau^2\mu\alpha_2^2\mu_1 + 2\rho\tau^2\alpha_2\mu_1^2\sigma_2 + \\
 &2\rho\tau\mu^2\alpha_2^2\mu_1 + 2\rho\tau\mu\alpha_2^2\mu_1 - 8\beta^2\gamma\tau\mu\mu_1 + 2\beta\epsilon\gamma^2\tau\alpha_2 - 6\beta\epsilon\gamma^2\mu\alpha_2 - 4\beta\epsilon\gamma^2\alpha_2\mu_1 - \\
 &6\beta\epsilon\gamma\mu^2\alpha_2 - 2\beta\epsilon\gamma\alpha_2\mu_1^2 + 2\beta\epsilon\tau\mu^2\alpha_2 + 2\beta\epsilon\tau\alpha_2\mu_1^2 - 4\beta\epsilon\mu^2\alpha_2\mu_1 - 2\beta\epsilon\mu\alpha_2\mu_1^2 + \\
 &8\beta\gamma^2\tau\mu\alpha_2 - 8\beta\gamma^2\tau\mu\sigma_2 + 4\beta\gamma^2\tau\alpha_2\mu_1 - 4\beta\gamma^2\tau\mu_1\sigma_2 - 4\beta\gamma^2\mu\alpha_2\mu_1 + 4\beta\gamma^2\mu\mu_1\sigma_2 - \\
 &4\beta\gamma\tau^2\mu\alpha_2 + 4\beta\gamma\tau^2\mu\sigma_2 - 4\beta\gamma\tau^2\alpha_2\mu_1 + 4\beta\gamma\tau^2\mu_1\sigma_2 + 10\gamma\tau\mu^2\alpha_2 - 10\beta\gamma\tau\mu^2\sigma_2)
 \end{aligned}$$

$$V = \frac{(\gamma + \mu_1 + \mu)(\gamma + \mu - (1 - \rho)\alpha_2 S)}{(\rho\alpha_2\sigma_1 S + (\gamma + \mu_1 + \mu)\sigma_2)}$$

$$I_1 = \frac{\rho\alpha_2 S I_2}{(\gamma + \mu_1 + \mu)}$$

$$I_2 = \frac{(\beta S - \epsilon - \mu)(\gamma + \mu_1 + \mu)}{(\rho\alpha_2\sigma_1 S + (\gamma + \mu_1 + \mu)\sigma_2)} \tag{15}$$

### 3. Bilangan Reproduksi Dasar

Akan ditentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit. Dengan melakukan pelinearan kelas yang terinfeksi yaitu  $I_1$  dan  $I_2$  sebagai berikut

$$\Leftrightarrow J(E) = \begin{bmatrix} -(\gamma + \mu_1 + \mu) & \rho\alpha_2 S \\ \sigma_1 V & (1 - \rho)\alpha_2 S + \sigma_2 V - (\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Substitusi titik ekuilibrium bebas penyakit sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\Leftrightarrow J(E_1) = \begin{bmatrix} -(\gamma + \mu_1 + \mu) & \frac{\rho\alpha_2(\epsilon + \mu)}{\beta} \\ \frac{\sigma_1(\epsilon + \mu)(\mu - \tau)}{\beta(-\tau + \epsilon + \mu)} & \frac{(-\tau + \epsilon + \mu)(1 - \rho)\alpha_2(\epsilon + \mu) + \sigma_2(\epsilon + \mu)(\tau - \mu) - \beta(-\tau + \epsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\beta(-\tau + \epsilon + \mu)} \end{bmatrix}$$

Dekomposisi matriks

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho\alpha_2(\epsilon + \mu)}{\beta} \\ \frac{\sigma_1(\epsilon + \mu)(\mu - \tau)}{\beta(-\tau + \epsilon + \mu)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -(\gamma + \mu_1 + \mu) & 0 \\ 0 & \frac{(-\tau + \epsilon + \mu)(1 - \rho)\alpha_2(\epsilon + \mu) + \sigma_2(\epsilon + \mu)(\tau - \mu) - \beta(-\tau + \epsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\beta(-\tau + \epsilon + \mu)} \end{bmatrix}$$

Menghitung nilai  $R_0 = \rho(FV^{-1})$ . Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) yaitu

$$R_0 = \sqrt{\frac{\rho a_2(\varepsilon+\mu)(-\tau+\varepsilon+\mu)(\sigma_1(\varepsilon+\mu)(\tau-\mu))}{\beta(\gamma+\mu_1+\mu)(\beta(-\tau+\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)-(-\tau+\varepsilon+\mu)(1-\rho)\alpha_2(\varepsilon+\mu)-\sigma_2(\varepsilon+\mu)(\tau-\mu))}} \quad (16)$$

#### 4. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan titik ekuilibrium akan dilakukan berdasarkan nilai parameter yang ada pada tabel berikut. Adapun nilai – nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut

Tabel 2. Nilai - Nilai Parameter

No	Parameter	Nilai Parameter	Keterangan
1.	$\alpha_1$	0	Tingkat penularan pasien Covid – 19 yang memiliki gejala sedang hingga berat akan diisolasi di rumah sakit sehingga penularan pada tenaga Kesehatan kecil maka diasumsikan $\alpha_1 = 0$
4.	$\gamma$	0,0769/hari	Diperoleh dari 1 dibagi waktu seseorang dinyatakan sembuh setelah 13 hari $\frac{1}{13} = 0,076923 \approx 0,0769$
5.	$\varepsilon$	0,0714 / hari	Diperoleh dari 1 dibagi waktu seseorang akan mengalami kekebalan setelah mendapatkan vaksin 10 – 14 hari $\frac{1}{14} = 0,071429 \approx 0,0714$
6.	$\mu$	0,0670 / hari	Diperoleh dari data dikdukcapil Kota Yogyakarta yaitu 6,7 %
7.	$\tau$	0,0880 / hari	Diperoleh dari data dikdukcapil Kota Yogyakarta yaitu 8,8 %
8.	$\mu_1$	0,0001 / hari	Diperoleh dari banyaknya kematian akibat Covid – 19 per hari dibagi total kasus Covid – 19 $\frac{\frac{5924}{365}}{223.503} = 0,000073 \approx 0,0001$
9.	$\delta_1$	0	Seseorang yang telah sembuh dari Covid – 19 diasumsikan akan lebih menerapkan protokol kesehatan yang ketat agar tidak tertular Covid – 19 untuk kedua kalinya. Untuk itu, diasumsikan tidak terjadi perpindahan individu dari kelas <i>Recovered</i> ( $R$ ) ke kelas <i>Infected 2</i> ( $I_2$ ) maka $\delta_1 = 0$



10.	$\delta_2$	0	Seseorang yang telah sembuh dari Covid – 19 diasumsikan akan lebih menerapkan protokol kesehatan yang ketat agar tidak tertular Covid – 19 untuk kedua kalinya. Untuk itu, diasumsikan tidak terjadi perpindahan individu dari kelas <i>Recovered</i> ( <i>R</i> ) ke kelas <i>Infected 2</i> ( <i>I<sub>2</sub></i> ) maka $\delta_2 = 0$
11.	$\sigma_1$	0,0056 / individu.hari	Diperoleh dari 1 dibagi setiap individu yang telah divaksinasi dikali dengan lama waktu kekebalan vaksinasi terhadap Covid – 19  $\frac{1}{1 \times 180} = 0,005556 \approx 0,0056$
12.	$\sigma_2$	0,0056 / individu.hari	Diperoleh dari 1 dibagi banyaknya individu yang telah divaksinasi dikali dengan lama waktu kekebalan vaksinasi terhadap Covid – 19  $\frac{1}{1 \times 180} = 0,005556 \approx 0,0056$
13.	$\rho$	0,1746	Diperoleh dari data Dinas Kesehatan Provinsi DIY untuk penderita Diabetes sebesar 4,5 % dan penderita hipertensi sebesar 10,7 % dan data Dinas Kesehatan Yogyakarta yang diasumsikan sama untuk Provinsi DIY untuk penderita obesitas sebesar 2,26%  $4,5\% + 10,7\% + 2,26 = 17,46\% = 0,1746$

Berdasarkan Sistem (6) – (9) dapat ditentukan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(E) = \begin{bmatrix} \tau - \alpha_2 I_2 - \beta V - \mu & \tau - \beta S & \tau & \tau - \alpha_2 S \\ \beta V & \beta S - \sigma_1 I_1 - \sigma_2 I_2 - \varepsilon - \mu & -\sigma_1 V & -\sigma_2 V \\ \rho \alpha_2 I_2 & 0 & -(\gamma + \mu_1 + \mu) & \rho \alpha_2 S \\ (1 - \rho) \alpha_2 I_2 & \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2 & \sigma_1 V & (1 - \rho) \alpha_2 S + \sigma_2 V - (\gamma + \mu) \end{bmatrix} \quad (17)$$

a. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan matriks Jacobian pada Persamaan (17), selanjutnya analisis kestabilan dilakukan disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit pada Persamaan (14) Dengan substitusi nilai parameter pada Tabel 2 ke Persamaan (17) sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^4 + \left(0.3246 - \frac{0.1142 \alpha_2}{\beta} + \frac{0.0003}{\beta}\right) \lambda^3 + \left(0.0313 - \frac{0.0206 \alpha_2}{\beta} + \frac{0.0001}{\beta}\right) \lambda^2 + \left(-\frac{0.0006 \alpha_2}{\beta} + 0.0008\right) \lambda = 0 \quad (18)$$

Diperoleh

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \left( 0.3246 - \frac{0.1142 \alpha_2}{\beta} + \frac{0.0003}{\beta} \right)$$

$$a_2 = \left( 0.0313 - \frac{0.0206 \alpha_2}{\beta} + \frac{0.0001}{\beta} \right)$$

$$a_3 = \left( -\frac{0.0006 \alpha_2}{\beta} + 0.0008 \right)$$

$$a_4 = 0$$

Untuk mengetahui bagian real pada nilai eigen akan ditentukan melalui kriteria *Routh Hurwitz*. Berdasarkan Persamaan (18) dengan menggunakan kriteria *Routh Hurwitz* dapat diketahui bahwa terdapat nilai eigen yang sama dengan nol, maka kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit tidak dapat ditentukan melalui nilai eigen. Namun kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dapat ditentukan melalui gambar potret fase dari Sistem (6) – (9).

b. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Analisis kestabilan dilakukan disekitar titik ekuilibrium endemik  $E_2$ . Dimisalkan matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium endemik sebagai berikut.

$$J_{(E_2)} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & e & f & g \\ h & 0 & i & j \\ k & l & m & n \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^4 + (-a - f - j - o)\lambda^3 + (af + aj + fj + ao + fo + jo - ci - mh)\lambda^2 + (-afj - afo - ajo - fjo + cif + cio + mha + mhj)\lambda + afjo + bgkl + chim - cifo - bekn - mhaj = 0 \tag{19}$$

diperoleh

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (-a - f - j - o)$$

$$a_2 = (af + aj + fj + ao + fo + jo - ci - mh)$$

$$a_3 = (-afj - afo - ajo - fjo + cif + cio + mha + mhj)$$

$$a_4 = afjo + bgkl + chim - cifo - bekn - mhaj$$

dengan

$$\begin{array}{lll} a = \tau - \alpha_2 I_2 - \beta V - \mu & f = \beta S - \sigma_1 I_1 - \sigma_2 I_2 - \varepsilon - \mu & k = \rho \alpha_2 S \\ b = \tau - \beta S & g = -\sigma_1 V & l = (1 - \rho) \alpha_2 I_2 \\ c = \tau & h = \tau - \alpha_2 S & m = \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2 \\ d = \tau - \alpha_2 S & i = \rho \alpha_2 I_2 & n = \sigma_1 V \\ e = \beta V & j = -(\gamma + \mu_1 + \mu) & o = (1 - \rho) \alpha_2 S + \sigma_2 V - (\gamma + \mu) \end{array}$$

Penentuan kestabilan titik ekuilibrium endemik sulit dilakukan karena perhitungan terlalu panjang. Oleh karena itu, berikut ini akan diberikan contoh penentuan titik ekuilibrium endemik untuk sebarang nilai  $\alpha_2$  dan  $\beta$ . Substitusi nilai parameter pada Tabel 2 ke Persamaan (15)

dengan  $\alpha_2 = 0,0007$  dan  $\beta = 0,0028$  sehingga diperoleh titik ekulibrium endemik sebagai berikut

$$E_2 = (S, V, I_1, I_2) = (81,5292; 16,1666; 1,0387; 15,0116)$$

Selanjutnya substitusi titik ekulibrium endemik, nilai parameter pada Tabel 2, dan nilai  $\alpha_2$  dan  $\beta$  ke Persamaan (19) sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut.

$$\lambda^4 + 0,1850 \lambda^3 + 0,0141 \lambda^2 + 0,0015 \lambda = 0 \tag{20}$$

diperoleh

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0,1850$$

$$a_2 = 0,0141$$

$$a_3 = 0,0015$$

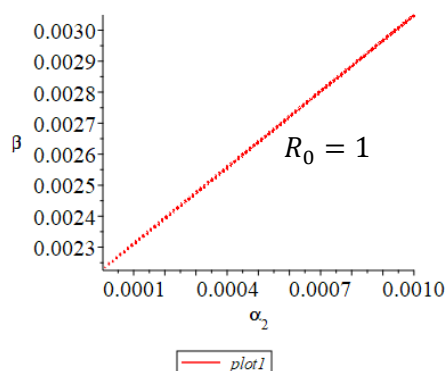
$$a_4 = 0$$

Untuk mengetahui bagian real pada nilai eigen akan ditentukan melalui kriteria *Routh Hurwitz*. Berdasarkan Persamaan (20) dengan menggunakan kriteria *Routh Hurwitz* dapat diketahui bahwa terdapat nilai eigen yang sama dengan nol, maka kestabilan titik ekuilibrium endemik tidak dapat ditentukan melalui nilai eigen. Namun kestabilan titik ekuilibrium endemik dapat ditentukan melalui gambar potret fase dari Sistem (6) – (9).

### 5. Perhitungan Numerik dan Simulasi

a. Untuk  $R_0 < 1$

Untuk mengetahui nilai  $R_0$  akan dipilih sebuah titik pada grafik  $R_0 = 1$  sebagai berikut.

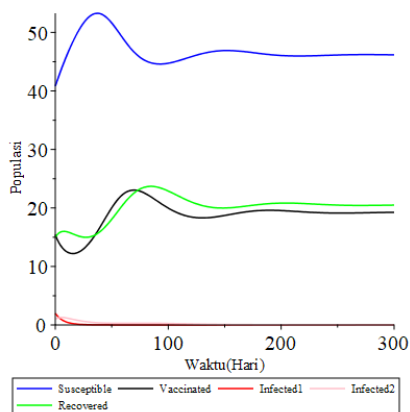


**Gambar 2. Plot  $R_0 = 1$**

Pada Gambar 2, daerah di atas grafik  $R_0 = 1$  menghasilkan nilai  $R_0 < 1$  sedangkan daerah dibawah grafik  $R_0 = 1$  menghasilkan  $R_0 > 1$ . Selanjutnya akan dipilih beberapa titik diatas grafik  $R_0 = 1$ . Berikut simulasi nilai  $R_0 < 1$  untuk beberapa titik di atas grafik  $R_0 = 1$ .

1) Dipilih sebuah titik diatas grafik  $R_0 = 1$  yaitu  $\alpha_2 = 0,0004$  dan  $\beta = 0,0030$

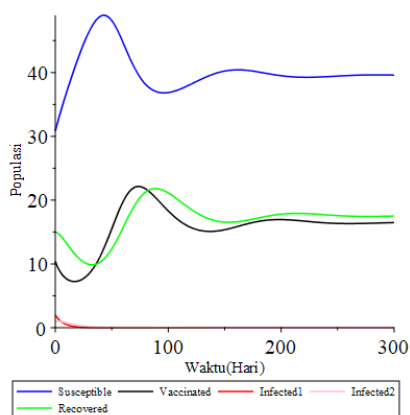
Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (46,1333; 19,2222; 0; 0)$  dan titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (435,8493; 0; 28,5630; 135,1218)$  dengan  $R_0 = 0,0760$ . Berikut simulasi dari Sistem (6) – (9) dengan  $R_0 = 0,0760$ .



**Gambar 3.** Hasil simulasi Sistem (6) – (9) untuk  $R_0 = 0,0760$

2) Dipilih sebuah titik diatas grafik  $R_0 = 1$  yaitu  $\alpha_2 = 0,0005$  dan  $\beta = 0,0035$

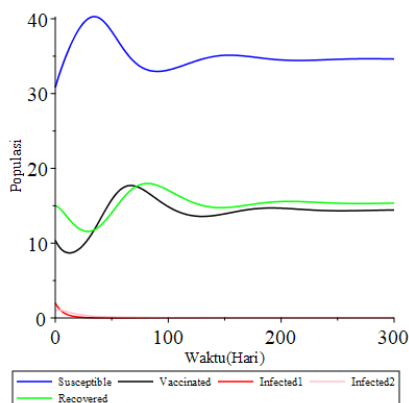
Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (39,5429; 16,4762; 0; 0)$  dan titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (348,6794; 0; 22,8504; 108,0974)$  dengan  $R_0 = 0,0562$ . Berikut simulasi dari Sistem (6) – (9) dengan  $R_0 = 0,0562$ .



**Gambar 4.** Hasil simulasi Sistem (6) – (9) untuk  $R_0 = 0,0562$

3) Dipilih sebuah titik diatas grafik  $R_0 = 1$  yaitu  $\alpha_2 = 0,0007$  dan  $\beta = 0,0040$

Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (34,6000; 14,4167; 0; 0)$  dan titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (249,0567; 0; 16,3217; 77,2125)$  dengan  $R_0 = 0,0526$ . Berikut simulasi dari Sistem (6) – (9) dengan  $R_0 = 0,0526$ .



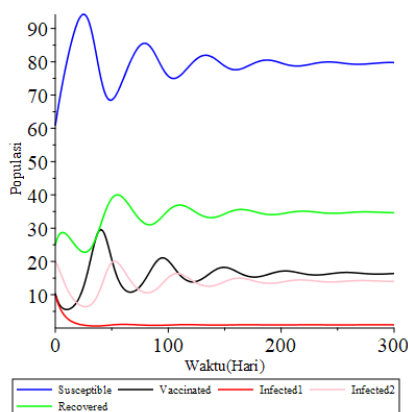
**Gambar 5.** Hasil simulasi Sistem (6) – (9) untuk  $R_0 = 0,0526$

b. Untuk  $R_0 > 1$

Pilih beberapa titik dibawah grafik  $R_0 = 1$  pada Gambar 2. Berikut simulasi nilai  $R_0 > 1$  untuk beberapa titik di bawah grafik  $R_0 = 1$ .

1) Dipilih sebuah titik diatas grafik  $R_0 = 1$  yaitu  $\alpha_2 = 0,0007$  dan  $\beta = 0,0028$

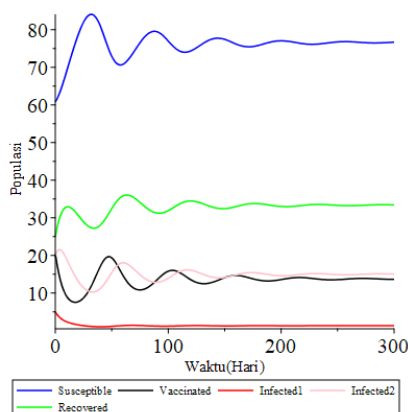
Diperoleh titik ekuilibrium bebas pnyakit yaitu  $E_1 = (49,4286; 20,5952; 0; 0)$  dan titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (81,5813; 16,1594; 1,0412; 15,0352)$  dengan  $R_0 = 7,0000$ . Berikut simulasi dari Sistem (6) – (9) dengan  $R_0 = 7,0000$ .



**Gambar 6.** Hasil simulasi Sistem (6) – (9) untuk  $R_0 = 7,0000$

2) Dipilih sebuah titik diatas grafik  $R_0 = 1$  yaitu  $\alpha_2 = 0,0010$  dan  $\beta = 0,0030$

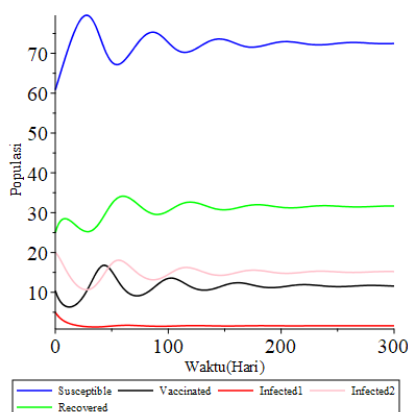
Diperoleh titik ekuilibrium bebas pnyakit yaitu  $E_1 = (46,1333; 19,2222; 0; 0)$  dan titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (78,7951; 13,4216; 1,4585; 16,0389)$  dengan  $R_0 = 4,9999$ . Berikut simulasi dari Sistem (6) – (9) dengan  $R_0 = 4,9999$ .



**Gambar 7.** Hasil simulasi Sistem (6) – (9) untuk  $R_0 = 4,9999$

3) Dipilih sebuah titik diatas grafik  $R_0 = 1$  yaitu  $\alpha_2 = 0,0012$  dan  $\beta = 0,0032$

Diperoleh titik ekuilibrium bebas pnyakit yaitu  $E_1 = (43,2500; 18,0208; 0; 0)$  dan titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (73,8009; 11,3843; 1,6967; 15,7609)$  dengan  $R_0 = 3,0000$ . Berikut simulasi dari Sistem (6) – (9) dengan  $R_0 = 3,0000$ .



**Gambar 8.** Hasil simulasi Sistem (6) – (9) untuk  $R_0 = 3,0000$

**Pembahasan**

Berdasarkan Gambar 3, Gambar 4, dan Gambar 5, masing - masing grafik dari individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* akan mengalami kenaikan, penurunan, hingga stabil saat  $t > 300$ . Pada Gambar 3 diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = 0,0760$  dengan seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (46,1333; 19,2222; 0; 0)$ . Pada Gambar 4 diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = 0,0562$  dengan seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (39,5429; 16,4762; 0; 0)$ . Pada Gambar 5 diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = 0,0526$  dengan seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_1 = (34,6000; 14,4167; 0; 0)$ . Berdasarkan Gambar 3, Gambar 4, dan Gambar 5 seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit maka dapat disimpulkan bahwa untuk  $R_0 < 1$  stabil asimtotik pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Kombinasi parameter  $\alpha_2$  dan  $\beta$  menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 di Provinsi Daerah istimewa Yogyakarta kurang dari satu. Artinya setiap individu yang terinfeksi Covid – 19 akan menginfeksi kurang dari satu individu baru. Sehingga pada kondisi tersebut sistem stabil dan penyakit akan hilang.

Berdasarkan Gambar 6, Gambar 7, dan Gambar 8, masing - masing grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* akan mengalami kenaikan, penurunan, hingga stabil saat  $t > 300$ . Pada Gambar 6 diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = 7,0000$  dengan seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (81,5813; 16,1594; 1,0412; 15,0352)$ . Pada Gambar 7 diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = 4,9999$  dengan seluruh grafik populasi individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (78,7951; 13,4216; 1,4585; 16,0389)$ . Pada Gambar 8 diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = 3,0000$  dengan seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju titik ekuilibrium endemik yaitu  $E_2 = (73,8009; 11,3843; 1,6967; 15,7609)$ . Berdasarkan Gambar 6, Gambar 7, dan Gambar 8 seluruh grafik individu *Susceptible*, individu *Vaccinated*, individu *Infected 1*, individu *Infected 2*, dan individu *Recovered* menuju ke titik ekuilibrium endemik maka dapat

disimpulkan bahwa untuk  $R_0 > 1$  stabil asimtotik pada titik ekuilibrium endemik. Kombinasi parameter  $\alpha_2$  dan  $\beta$  menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 di Provinsi Daerah istimewa Yogyakarta lebih dari satu yaitu sekitar tiga hingga tujuh. Artinya setiap individu yang terinfeksi Covid – 19 dapat menginfeksi tiga hingga tujuh individu baru. Sehingga pada kondisi tersebut penyakit akan terus bertambah dan menjadi endemik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar laju vaksinasi ( $\beta$ ) dapat menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar sehingga dapat membantu menurunkan kasus positif Covid – 19.

Kombinasi parameter  $\alpha_2$  dan  $\beta$  menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) pada model SVI<sub>1</sub>I<sub>2</sub>R pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 di Provinsi Daerah istimewa Yogyakarta lebih dari satu yaitu sekitar tiga hingga tujuh. Artinya setiap individu yang terinfeksi Covid – 19 dapat menginfeksi tiga hingga tujuh individu baru. Sehingga pada kondisi tersebut penyakit akan terus bertambah dan menjadi endemik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar laju vaksinasi ( $\beta$ ) dapat menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar sehingga dapat membantu menurunkan kasus positif Covid – 19.

## SIMPULAN

### Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa diperoleh model SVI<sub>1</sub>I<sub>2</sub>R pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \tau(S + V + I_1 + I_2) - \alpha_2SI_2 - \beta SV - \mu S \\ \frac{dV}{dt} &= \beta SV - \sigma_1VI_1 - \sigma_2VI_2 - \varepsilon V - \mu V \\ \frac{dI_1}{dt} &= \rho\alpha_2SI_2 - \gamma I_1 - \mu_1I_1 - \mu I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= (1 - \rho)\alpha_2SI_2 + \sigma_1VI_1 + \sigma_2VI_2 - \gamma I_2 - \mu I_2 \end{aligned}$$

dengan bilangan reproduksi

$$R_0 = \sqrt{\frac{\rho\alpha_2(\varepsilon+\mu)(-\tau+\varepsilon+\mu)(\sigma_1(\varepsilon+\mu)(\tau-\mu))}{\beta(\gamma+\mu_1+\mu)(\beta(-\tau+\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)-(-\tau+\varepsilon+\mu)(1-\rho)\alpha_2(\varepsilon+\mu)-\sigma_2(\varepsilon+\mu)(\tau-\mu))}}$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_1$ ) stabil asimtotik pada nilai parameter  $\alpha_2 = 0,0004$ ,  $\alpha_2 = 0,0005$ ,  $\alpha_2 = 0,0007$  dan nilai  $\beta = 0,0030$ ,  $\beta = 0,0035$ ,  $\beta = 0,0040$  saat  $R_0 < 1$ . Artinya setiap individu yang terinfeksi Covid – 19 akan menginfeksi kurang dari satu individu baru. Sehingga pada kondisi tersebut sistem stabil dan penyakit akan hilang. Sedangkan titik ekuilibrium endemik ( $E_2$ ) stabil asimtotik pada nilai parameter  $\alpha_2 = 0,0007$ ,  $\alpha_2 = 0,00010$ ,  $\alpha_2 = 0,0012$  dan nilai  $\beta = 0,0028$ ,  $\beta = 0,0030$ ,  $\beta = 0,0032$  saat  $R_0 > 1$  sekitar 3 – 7. Artinya setiap individu terinfeksi Covid – 19 dapat menginfeksi tiga hingga tujuh individu baru, sehingga kasus positif Covid – 19 akan terus bertambah dan menjadi endemik. Hasil simulasi numerik pada model SVI<sub>1</sub>I<sub>2</sub>R pengaruh vaksinasi terhadap kasus positif Covid – 19 diperoleh bahwa semakin besar laju vaksinasi ( $\beta$ ) dapat menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar sehingga dapat membantu menurunkan kasus positif Covid – 19.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada koordinator Prodi Matematika dan seluruh Dosen Prodi Matematika yang telah memberikan ilmu dan bimbingan hingga terselesainya artikel ini.

## DAFTAR PUSTAKA

- Corona Statistic. (2021). Data Covid – 19 Per Provinsi. Diambil pada 15 September 2022 dari <https://datastudio.google.com/u/0/reporting/fda876a7-3eb2-4080-92e8-679c93d6d1bd/page/3cjTB>
- Dinas Kesehatan DIY. (2021). Rencana Kerja 2021. Yogyakarta
- Dinas Kesehatan Kota Yogyakarta. (2019). Profil Kesehatan Tahun 2019 Kota Yogyakarta. Yogyakarta
- Elfiah, Ulfa. Dkk. (2021). *Buku Panduan Pencegahan Covid – 19 di Lingkungan Uninvestitas Jember*. Jember: Universitas Jember.
- Kasbawati. (2011). Analisis Numerik Model Epidemiologi SIR dengan Faktor Difusi. *JMSK Jurnal Matematika, Statistika, Dan Komputasi*, 7(2), 98–107.
- Makmun, Armanto. dan Hazhiyah, Siti Fadhilah. (2020). Tinjauan Terkait Pengembangan Vaksin Covid 19. *Molucca Medica*, 13(2).
- Nadia, Siti. (2020). Kesiapan Kemenkes Dalam Menghadapi Outbreak Novel Coronavirus (2019-nCoV). Jakarta : Kemenkes RI
- Nasir, Narila Mutia. Joyosemito, Ibnu Susanto. Boerman, Baequni dan Ismaniah. (2021) Kebijakan Vaksinasi COVID-19: Pendekatan Pemodelan Matematika Dinamis Pada Efektivitas Dan Dampak Vaksin Di Indonesia. *Jurnal ABDIMAS (Pendabdian kepada Masyarakat) UBJ* , 4(2), 191 – 204
- Prayudi. (2006). Matematika Teknik Edisi Pertama. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- R, Elfi Quayumi dan Alimansur, Moh. (2020) Upaya Pencegahan Dengan Kepatuhan Dalam Pencegahan Penularan Covid-19 Pada Relawan Covid. *JPH RECODE*. 4 (1), 81-87
- Rahayu, L. A., Admiyanti, J. C., Khalda, Y. I., Adha, F. R., & Agistany, N. F. F. (2021). Hipertensi, Diabetes Melitus Dan Obesitas Sebagai Faktor Komorbiditas Utama Terhadap Mortalitas Pasien Covid-19: Sebuah Studi Literatur Tjauan Pustaka Hypertension , Diabetes Mellitus , and Obesity As the Main Comorbidity Factors of Mortality in Covid-1. *Jurnal Ilmiah Mahasiswa Kedokteran Indonesia*, 9, 90–97.
- Rahayu, Rochani Nani dan Sensusiyati. (2021) Vaksin Covid 19 di Indonesia: Analisis Berita Hoax. *Jurnal Ekonomi, Sosial, & Humaniora*. 2(07)
- Sari, Shinta Puspita dan Arfi , Eristia. (2021) Analisis Dinamik Model SIR Pada Kasus Penyebaran Penyakit Corona Virus Disease-19 (COVID-19). *Indonesian Journal of Applied Mathematics*, 1(2), 61-68
- Sinuhaji Ferdinand. (2015) Model Epidemii SIRS. Model Epidemii Sirs Dengan Time Delay, 4(1), 78-88
- Worldometers, (2021) “Covid-19 Coronavirus Pandemic”. Diambil pada 10 Oktober 2021 dari <https://www.worldometers.info/coronavirus/>