

PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MODEL *SEIR*

MATHEMATICAL MODELING ON DISTRIBUTION OF MALARIA WITH SEIR MODEL

Oleh: Eko Saputro Sulistioningtias, Dwi Lestari, M.Sc.

Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY

ekosaputrosulistioningtias@gmail.com

Abstrak

Malaria merupakan penyakit yang disebabkan oleh nyamuk *anopheles* betina. Penularan penyakit malaria dapat terjadi melalui kontak langsung maupun tidak langsung. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan model matematika *SEIR* pada penyebaran penyakit malaria tanpa vaksinasi dan menggunakan vaksinasi, menganalisa kestabilan disekitar titik ekuilibrium pada penyebaran penyakit malaria tanpa vaksinasi dan menggunakan vaksinasi, dan menjelaskan simulasi model penyebaran penyakit malaria tanpa vaksinasi dan menggunakan vaksinasi.

Tahapan untuk menganalisis model *SEIR* pada penyebaran penyakit malaria adalah membentuk model *SEIR*, mentransformasikan model, menentukan titik ekuilibrium, menentukan bilangan reproduksi dasar, menganalisis kestabilan di titik ekuilibrium dan melakukan simulasi menggunakan *software Maple 16*.

Hasil yang diperoleh yaitu dapat dibentuk model *SEIR* dengan 4 kelas populasi yaitu kelas *Susceptible*, kelas *Exposed*, kelas *Infected* dan kelas *Recovered*. Model yang diperoleh berupa sistem persamaan diferensial non linear. Model penyebaran penyakit malaria disederhanakan menjadi *seir* baik yang tanpa vaksinasi maupun menggunakan vaksinasi. Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal saat bilangan reproduksi dasar kurang dari satu dan tidak stabil saat bilangan reproduksi dasar lebih dari satu. Kemudian untuk kestabilan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal saat bilangan reproduksi dasar lebih dari satu. Laju infeksi sangat berpengaruh dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit maupun endemik. Semakin tinggi laju infeksi maka penyakit akan menyebar. Berdasarkan dari simulasi model, semakin tinggi tingkat vaksin yang diberikan maka kelas *Infected* akan menurun menuju nol. Jadi program vaksinasi dapat digunakan untuk mengendalikan penyebaran penyakit malaria.

Kata kunci: Malaria, Titik Ekuilibrium, Kestabilan, Vaksinasi

Abstract

Malaria is a disease caused by the female Anopheles mosquito. The process of malaria transmission occur through direct or indirect contact. The purpose of this study are to explain a model of SEIR on distribution of malaria with and whitout the effect of vaccination, analyzed stability around of the equilibrium point on distribution of malaria with and whitout the effect of vaccination, and explains the simulation model of malaria with and whitout the effect of vaccination.

The stages for analyzing the SEIR model on malaria are forming the SEIR model, transforming the model, determining equilibrium point, determining the basic reproduction number, analyzing stability of equilibrium point and performing simulation using Maple 16 software.

The results of this study obtained are SEIR model with 4 classes of population which are, Susceptible class, Exposed class, Infected class and Recovered class. The model obtained is a system of non linear differential equations. The model of the transmission of the malaria is simpified into seir by with and whitout the effect of vaccination. The stability of the disease-free equilibrium point will stable asymptotically local when the reproduction number is less than one and unstable when the reproduction number is more than one. In addition to the stability of the local asymptotic stable endemic equilibrium point when the reproduction number is more than one. Infection rate in determining the stability of the disease-free or endemic equilibrium point. The higher the infection rate the disease will spread. Based on the model simulation, the higher the level vaccination then the Infected class will decrease to zero. So the vaccination program can be used to control the transmission of malaria.

Keywords: Malaria, Equilibrium Point, Stability, Vaccination

PENDAHULUAN

Nyamuk bukanlah serangga yang asing lagi bagi kita. Menurut para pakar, nyamuk betina lebih berbahaya daripada nyamuk jantan. Nyamuk betinalah yang sering menghisap darah manusia ataupun mamalia, sedangkan nyamuk jantan memakan nektar dan cairan tumbuhan. Selain menghisap darah, nyamuk-nyamuk betina tersebut juga berperan sebagai perantara beberapa jenis bibit penyakit diantaranya adalah penyakit malaria (Putra, 1994).

Malaria merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh *plasmodium* atau makhluk hidup parasit bersel satu dan termasuk ke dalam kelompok *protozoa* yang kemudian hidup dan berkembang biak di dalam sel darah manusia. Penyakit ini secara alami ditularkan melalui gigitan nyamuk *anopheles* betina. Jenis-jenis *plasmodium* yang dibawa oleh nyamuk ini adalah *plasmodium falciparum* (penyebab malaria tropika), *plasmodium vivax* (penyebab malaria tertiana), *plasmodium malariae* (penyebab malaria quartana) dan *plasmodium ovale* (penyebab malaria ovale)(Arnida, 2012).

Saat *plasmodium* ini mulai menginfeksi tubuh, Putra (2011) menyebutkan akan ada 3 (tiga) stadium yang dialami secara berurutan oleh manusia yaitu:

1. Stadium *frigoris* (menggigil)

Stadium ini mulai dengan menggigil dan perasaan sangat dingin. Nadi penderita sangat cepat, tetapi lemah. Bibir dan jari-jari pucat kebiruan (*sianotik*). Kulitnya kering dan pucat, pada penderita anak-anak sering terjadi kejang. Stadium ini berlangsung selama 15 menit – 1 jam.

2. Stadium *akme* (puncak demam)

Setelah menggigil/merasa dingin, pada stadium ini penderita mengalami serangan demam. Muka penderita menjadi merah, kulit kering dan dirasakan sangat panas seperti terbakar, sakit kepala bertambah keras, dan sering disertai rasa mual atau muntah-muntah. Nadi penderita menjadi kuat kembali. Biasanya penderita merasa sangat haus dan suhu badan bisa meningkat sampai 41°C. Stadium ini berlangsung selama 2 – 4 jam.

3. Stadium *sudoris* (berkeringat banyak, suhu turun)

Pada stadium ini penderita berkeringat banyak sekali, sampai membasahi tempat tidur. Namun suhu badan pada fase ini turun dengan cepat, kadang-kadang sampai dibawah normal. Biasanya penderita tidur nyenyak dan pada saat terjaga, ia merasa lemah, tetapi tanpa gejala lain. Stadium ini berlangsung selama 2 – 4 jam.

Menurut perilakunya pasca menginfeksi, malaria dibagi menjadi 2 (dua), yaitu adanya serangan ulang dari *plasmodium* setelah serangan pertama hilang (kambuh) atau *plasmodium* benar-benar hilang setelah serangan pertama tanpa menjangkiti kembali (sembuh). Untuk *plasmodium* yang menyebabkan kambuh kembali yaitu *plasmodium vivax* dan *plasmodium ovale*. Sedangkan untuk *plasmodium* yang tidak dapat menyebabkan malaria kambuh kembali yaitu *plasmodium malariae* dan *plasmodium falciparum* (Cogswell, 1992).

Ada beberapa kasus malaria yang telah tercatat salah satunya oleh *World Malaria Report* 2015 yang menyebutkan bahwa malaria telah menyerang dan menyebar ke 106 negara di dunia.

Penyebaran malaria pada suatu wilayah tersebut ditentukan dengan *Annual Parasit Incidence* (API) per tahun. API merupakan jumlah kasus positif malaria per 1.000 penduduk dalam satu tahun. Berikut tabel kasus positif malaria pada rentang tahun 2011 hingga tahun 2015,

Tabel 1.1 Jumlah kasus positif malaria per 1.000 penduduk dalam satu tahun

Tahun	Jumlah Kasus
2011	1,75
2012	1,69
2013	1,58
2014	0,99
2015	0,85

Berdasarkan Tabel 1.1 di atas tren API secara nasional pada tahun 2011 hingga 2015 terus mengalami penurunan (Kemenkes RI, 2016).

Jika dilihat pada masing-masing provinsi di tahun 2015 untuk jumlah kasus positif malaria per 1.000 penduduk bisa diamati pada Lampiran 1. Berdasarkan Lampiran 1, pada tahun 2015 tampak bahwa wilayah timur Indonesia masih memiliki angka API tertinggi. Sedangkan Jawa Barat, Banten, Jawa Timur, DKI Jakarta dan Bali memiliki angka API nol sehingga kelima provinsi ini sudah masuk dalam kategori provinsi bebas malaria (Kemenkes RI, 2016).

Penderita malaria dibagi menjadi dua tipe, yaitu penderita malaria laten dan penderita malaria aktif. Penderita malaria laten yaitu masa pasien di luar masa serangan demam. Periode ini terjadi bila parasit tidak dapat ditemukan dalam darah tepi, tetapi *stadium* eksoeritrosit masih bertahan dalam jaringan hati. Sedangkan

penderita malaria aktif yaitu masa pasien sudah di dalam masa serangan demam. Periode ini terjadi bila parasit mulai mengalahkan pertahanan tubuh dan mulai menampakkan gejala (Harijanto, 2010).

Mengingat sudah banyaknya penyakit malaria yang menyerang manusia dan sifat penularannya yang begitu cepat sehingga menimbulkan kerugian yang cukup besar pada kesehatan. Oleh karenanya, dibutuhkan suatu cara mengendalikan penyebaran penyakit malaria agar tidak semakin meluas dalam suatu populasi. Salah satu cara yang dapat digunakan yaitu dengan melakukan program vaksinasi. Vaksinasi adalah pemberian *imun* ke dalam tubuh untuk memberikan kekebalan aktif pada suatu penyakit. Menurut Parera, dkk (2012) pemberian vaksinasi yang paling ideal adalah dengan membuat seseorang yang tidak pernah terpapar *plasmodium* menjadi imun dengan cara memaparkan pada *plasmodium* yang dilemahkan. Dalam hal ini *sporozoit* adalah bentuk yang terpenting karena sesuai dengan bentuk *plasmodium* yang dimasukkan ke dalam tubuh manusia.

Selain menggunakan vaksinasi, perkembangan ilmu pengetahuan dibidang matematika pun turut memiliki peran penting dalam mengatasi masalah di kehidupan nyata. Tamrin (2007) mengungkapkan bahwa salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata yaitu model matematika. Model matematika adalah hasil perumusan yang menggambarkan masalah dalam kehidupan nyata yang kemudian akan dicari solusinya. Model matematika yang digunakan untuk melihat tingkat penyebaran suatu penyakit menular disebut dengan model

epidemi. Dari model matematika tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial yang dapat diketahui titik ekuilibrium sistem dan dapat dianalisis kestabilan di sekitar titik ekuilibrium.

Salah satu contoh model matematika epidemi adalah model epidemi *SIR*. Model ini pertama kali dipelajari dan dikenalkan oleh W.O.Kerkmark dan A.G.Mc Kendrik. Berdasarkan karakteristiknya, model *SIR* mengelompokkan populasi ke dalam tiga subpopulasi yaitu individu yang rentan terinfeksi penyakit yang disebut *Susceptible*, individu yang terinfeksi penyakit yang disebut *Infected*, dan individu yang telah bersih dari penyakit yang disebut *Recovered*. Model ini menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *Susceptible* menjadi *Infected*, kemudian kelompok individu *Infected* yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan menjadi individu *Recovered* dengan masing-masing diberikan dalam waktu t (Castellini & Romanelli, 2009).

Penggunaan model *SIR* ini lambat laun mengalami pengembangan dari model epidemi *SIR* menjadi model epidemi *SEIR*. Sama halnya dengan model *SIR*, yang berbeda dari model *SEIR* adalah model *SEIR* membagi populasi ke dalam empat subpopulasi yaitu individu yang rentan terinfeksi penyakit yang disebut *Susceptible* (S), individu yang sudah terjangkit penyakit namun belum menunjukkan tanda-tanda gejala yang disebut *Exposed* (E), individu yang terinfeksi penyakit yang disebut *Infected* (I) dan individu yang telah bersih dari penyakit yang disebut *Recovered* (R). Selain itu dalam model *SEIR* ada masa dimana individu baru

memperlihatkan gejalanya bahwa individu ini akan terinfeksi yang biasa disebut periode laten. Kemudian dalam penggambaran alurnyapun berbeda. Model *SEIR* ini menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *Susceptible* menjadi *Exposed*, kemudian kelompok individu *Exposed* yang dapat terjangkit namun belum menunjukkan tanda-tanda gejala terjangkit penyakit akan menjadi *Infected*, selanjutnya kelompok individu *Infected* yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan menjadi individu *Recovered* dengan masing-masing diberikan dalam waktu t (Singh, 2011).

Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang mengkaji tentang pemodelan matematika penyakit menggunakan model *SEIR*. Pada penelitian Seli (2017) menjelaskan bahwa model *SEIR* pada penyakit kolera memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium endemik yang bergantung pada nilai laju penginfeksi dari individu kelas *exposed* menjadi individu kelas *infected* per satuan waktu (ϵ) dan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Penelitian lain juga dilakukan oleh Ernik (2016) yang menjelaskan bahwa model *SEIR* pada penyakit cacar air memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik yang kestabilannya bergantung pada parameter laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Jika laju kontak dan laju individu laten menjadi terinfeksi lebih kecil dari laju kelahiran maka dalam jangka waktu tertentu penyakit cacar air akan menghilang dari populasi. Sebaliknya, jika laju kontak dan laju individu laten menjadi terinfeksi lebih besar dari laju kelahiran maka

penyakit cacar air masih ada dalam populasi atau menyebar dalam populasi.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang pemodelan matematika penyebaran penyakit malaria dengan model *SEIR*. Pemodelan penyebaran penyakit malaria ini memperhatikan adanya kelahiran dan kematian alami yang terjadi dalam populasi yang mana laju kelahiran diasumsikan sama dengan laju kematian alami. Selanjutnya dilakukan formulasi model matematika untuk empat kelas populasi yaitu *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I) dan *Recovered* (R). Dipilihnya model ini karena penyebaran penyakit malaria mampu menjangkiti kelompok individu rentan (*susceptible*) menjadi *exposed*, kemudian ada saat dimana penyakit malaria dapat menjangkit namun tidak menunjukkan tanda-tanda gejalanya atau biasa disebut periode laten (*exposed*) akan menjadi *infected*, setelah itu kelompok individu yang terinfeksi penyakit malaria (*infected*) dan mampu bertahan terhadap penyakit malaria akan menjadi kelompok individu sembuh (*recovered*). Melalui model tersebut akan dicari titik ekuilibrium bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar dan selanjutnya akan dianalisis kestabilan di sekitar titik ekuilibrium baik yang menggunakan vaksinasi maupun tanpa vaksinasi. Vaksinasi ini akan diberikan kepada kelompok individu rentan (*susceptible*) yang akan berakibat pada kelompok individu sembuh (*recovered*). Dari sini akan terlihat perbedaan pada model penyebaran penyakit malaria menggunakan vaksinasi maupun tanpa vaksinasi di bagian kelas *susceptible* dan kelas *recovered*. Setelah itu kemudian akan dilakukan simulasi untuk memperoleh rasio

pemberian vaksin yang tepat agar penyebaran penyakit malaria dapat menghilang dari populasi.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Malaria adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *protozoa* genus *plasmodium* yang terdiri dari spesies *Plasmodium vivax*, *Plasmodium malariae*, *Plasmodium falciparum*, dan *Plasmodium ovale*. *Plasmodium* ini adalah makhluk hidup bersel satu yang masuk ke dalam tubuh melalui gigitan nyamuk *Anopheles*, tepatnya dari nyamuk betina. Pada umumnya jenis *Plasmodium* yang sering menyerang di Indonesia adalah *Plasmodium falciparum* dan *Plasmodium vivax* karena jenis ini sangat menyukai habitat dengan kondisi area tropis dan sub tropis. Kedua *plasmodium* ini merupakan jenis *protozoa* yang sangat mematikan dan juga mampu kambuh kembali di kemudian hari jika sudah terinfeksi walaupun kemungkinannya sangat kecil.

Pada kasus malaria, gejala-gejala umum yang akan terjadi biasanya dibedakan menjadi 3 (tiga) stadium. Pada ketiga stadium yang telah dijelaskan di atas, sebelum menunjukkan gejala awal pada stadium dingin (*cold stage*) individu akan melalui masa inkubasi sekitar 12 hari setelah gigitan nyamuk. Masa inkubasi yaitu masa dimana virus sudah masuk ke dalam tubuh sampai saat timbulnya gejala untuk yang pertama kali. Masa inkubasi dalam epidemi disebut sebagai periode laten. Periode laten ini terdapat pada kelas *Exposed* (E). Pada umumnya selama masa laten ini individu tidak bisa menularkan penyakit. Adanya periode laten ini yang menjadi alasan pembentukan model epidemi *SEIR*.

Model epidemi *SEIR* dalam penyebaran penyakit malaria pada waktu t memiliki 4 kelas yaitu kelas *Susceptible* (rentan) menyatakan kelas individu yang rentan terhadap penyakit malaria, kelas *Exposed* (laten) menyatakan kelas individu yang telah terinfeksi penyakit malaria namun belum menunjukkan gejala-gejala penyakit, kelas *Infected* (terinfeksi) menyatakan kelas individu terinfeksi yang telah menunjukkan gejala penyakit malaria dan dapat menularkan penyakit ke kelas individu rentan, yang terakhir adalah kelas *Recovered* (sembuh) yaitu kelas individu yang telah sembuh dari penyakit malaria dan kebal terhadap penyakit tersebut.

Asumsi pembentukan model matematika *SEIR* pada penyebaran penyakit malaria tanpa vaksinasi ini menurut Shah (2013) dibatasi oleh:

- Populasi penduduk bersifat tertutup yang berarti bahwa pertumbuhan ataupun pengurangan jumlah penduduk melalui emigrasi dan imigrasi tidak diperhatikan.
- Populasi penduduk konstan dan bersifat homogen yang berarti bahwa banyaknya populasi penduduk tetap dan setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk tertular suatu virus karena adanya kontak dengan individu terinfeksi.
- Hanya ada satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
- Laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama yang berarti setiap individu lahir masuk ke dalam kelas individu *Susceptible* dan setiap individu mati dari tiap kelas mempunyai laju proporsional dengan individu pada masing-masing kelas.
- Penyakit malaria hanya menular melalui kontak langsung dengan penderita.

- Terdapat masa inkubasi (periode laten) pada proses penularan penyakit malaria.
- Individu yang terinfeksi malaria dapat sembuh.
- Populasi individu yang sembuh mempunyai kekebalan permanen yang berarti saat seseorang sudah sembuh dari penyakit malaria dirinya tidak akan terserang lagi oleh penyakit yang sama karena di dalam tubuhnya akan membentuk sistem kekebalan tubuh seumur hidup terhadap *plasmodium* yang dibawa oleh nyamuk *Anopheles* betina.

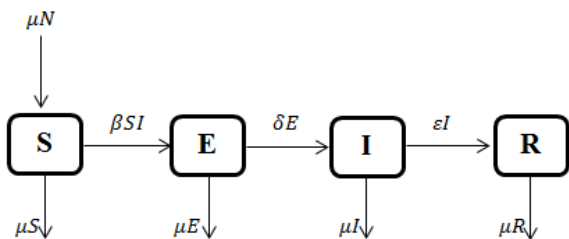
Selanjutnya asumsi pembentukan model matematika *SEIR* pada penyebaran penyakit malaria menurut Shah (2013) yang ditambahkan vaksinasi dibatasi oleh:

- Populasi penduduk bersifat tertutup dengan artian bahwa penambahan ataupun pengurangan jumlah penduduk melalui emigrasi dan imigrasi tidak diperhatikan.
- Populasi bersifat homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk tertular suatu virus karena adanya kontak langsung dengan individu terinfeksi.
- Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
- Laju kelahiran dan laju kematian alami diasumsikan sama. Setiap individu yang lahir masuk kedalam kelas individu *Susceptible* dan setiap individu yang mati dari setiap kelas mempunyai laju proporsional dengan jumlah individu masing-masing kelas.
- Penyakit malaria menular melalui kontak langsung dengan penderita
- Terdapat masa inkubasi (periode laten) pada proses penularan penyakit malaria.

- g. Individu yang berada pada masa inkubasi (periode laten) tidak dapat menularkan penyakit malaria.
- h. Individu yang terinfeksi penyakit malaria akan sembuh.
- i. Vaksinasi diberikan pada populasi rentan (*Susceptible*).
- j. Kekuatan dari vaksinasi diasumsikan 100% yang berarti individu akan kebal terhadap penyakit malaria jika diberikan vaksinasi.
- k. Seorang sudah sembuh dari oenyakit malaria tidak akan terserang lagi oleh penyakit yang sama karena tubuh orang tersebut akan membentuk sistem kekebalan tubuh seumur hidup terhadap *plasmodium*.

Berdasarkan asumsi-asumsi dapat dibentuk model matematika untuk penyebaran penyakit malaria sebagai berikut:

- a. Model matematika penyebaran penyakit malaria tanpa vaksinasi



diperoleh model matematika penyebaran penyakit malaria tanpa vaksinasi yang berupa sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \epsilon I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \epsilon I - \mu R$$

dengan $N = S + E + I + R$.

Selanjutnya dilakukan transformasi hingga diperoleh:

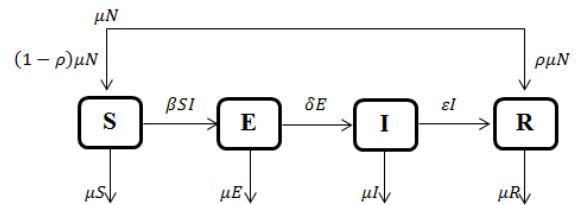
$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - \delta e - \mu e$$

$$\frac{di}{dt} = \delta e - \epsilon i - \mu i$$

$$\frac{dr}{dt} = \epsilon i - \mu r$$

- b. Model matematika penyebaran penyakit malaria menggunakan vaksinasi



diperoleh model matematika penyebaran penyakit malaria menggunakan vaksinasi yang berupa sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1 - \rho)\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \epsilon I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \epsilon I + \rho\mu N - \mu R$$

dengan $N = S + E + I + R$.

Selanjutnya dilakukan transformasi hingga diperoleh:

$$\frac{ds}{dt} = (1 - \rho)\mu - \beta si - \mu s$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - \delta e - \mu e$$

$$\frac{di}{dt} = \delta e - \epsilon i - \mu i$$

$$\frac{dr}{dt} = \epsilon i + \rho\mu - \mu r$$

Analisis Model Penyebaran Penyakit Malaria

Setelah model terbentuk kemudian dilakukan analisis untuk penyebaran penyakit malaria baik yang tanpa vaksinasi ataupun menggunakan vaksinasi.

a. Analisis Model Tanpa Vaksinasi

Titik (S, E, I, R) untuk titik kuilibrium model tanpa vaksinasi memenuhi teorema berikut:

1) Jika $i = 0$, maka sistem persamaan tanpa vaksinasi memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1, 0, 0, 0)$.

2) Jika $i \neq 0$, maka sistem persamaan tanpa vaksinasi memiliki titik ekuilibrium endemik

$$E_1 = (s, e, i, r) = \left(\frac{(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta\delta}, \frac{\mu\beta\delta - \mu(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta\delta(\delta + \mu)}, \frac{\mu\beta\delta - \mu(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}, \frac{\varepsilon\beta\delta - \varepsilon(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)} \right)$$

Kemudian untuk bilangan reproduksi dasar diperoleh nilai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}$$

Selanjutnya untuk analisis kestabilan diperoleh sesuai teorema berikut:

- 1) Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1, 0, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal.
- 2) Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1, 0, 0, 0)$ tidak stabil.

b. Analisis Model Menggunakan Vaksinasi

Titik (S, E, I, R) untuk titik kuilibrium model menggunakan vaksinasi memenuhi teorema berikut:

1) Jika $i = 0$, maka sistem persamaan

menggunakan vaksinasi memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1 - \rho, 0, 0, \rho)$.

2) Jika $i \neq 0$, maka sistem persamaan menggunakan vaksinasi memiliki titik ekuilibrium endemik:

$$E_1 = (s, e, i, r) = \left(\frac{(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta\delta}, \frac{(1 - \rho)\mu\beta\delta - \pi(\varepsilon + \mu)(\delta + \mu)}{\beta\delta(\delta + \mu)}, \frac{(1 - \rho)\mu\beta\delta - \mu(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}, \frac{(1 - \rho)\varepsilon\beta\delta + (\rho\beta - \varepsilon)(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}{\beta(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)} \right)$$

Kemudian untuk bilangan reproduksi dasar diperoleh nilai berikut:

$$R_0 = \frac{(1 - \rho)\beta\delta}{(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu)}$$

Selanjutnya untuk analisis kestabilan diperoleh sesuai teorema berikut:

- 1) Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1 - \rho, 0, 0, \rho)$ stabil asimtotik lokal.
- 2) Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1 - \rho, 0, 0, \rho)$ tidak stabil.

Simulasi Model

Baerdasarkan permasalahan nyata di Peovinsi Papua diperoleh nilai awal untuk $s(0) = 51.088$, $e(0) = 19.158$, $i(0) = 31.930$ dan $r(0) = 25.544$ pada penyebaran penyakit malaria. Selanjutnya diperoleh pula nilai laju yang berpengaruh pada banyaknya populasi pada masing-masing kelas untuk $\mu = 0,004$, $\beta = 0,083$, $\delta = 0,027$ dan $\varepsilon = 0,011$. Kemudian untuk parameter $\rho = 0,80$ yang artinya rasio minimal jumlah individu yang memperoleh vaksin

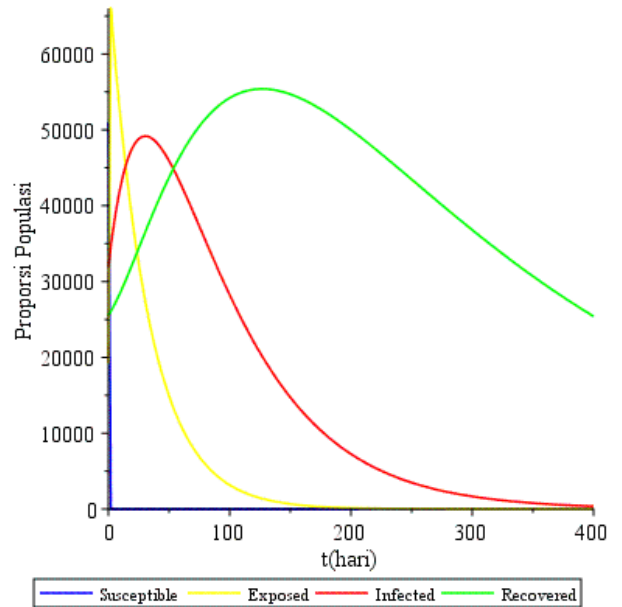
agar pada waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi.

Berikutnya untuk parameter ρ menyatakan rasio jumlah individu yang memperoleh vaksin dan untuk parameter β menyatakan laju infeksi. Nilai dari parameter ini dapat bervariasi sesuai dengan kondisi R_0 . Berdasarkan nilai-nilai parameter dan nilai awal yang diberikan, selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk model penyebaran penyakit malaria. Dalam simulasi tersebut akan dilihat pengaruh vaksinasi untuk penyebaran penyakit malaria dalam suatu populasi.

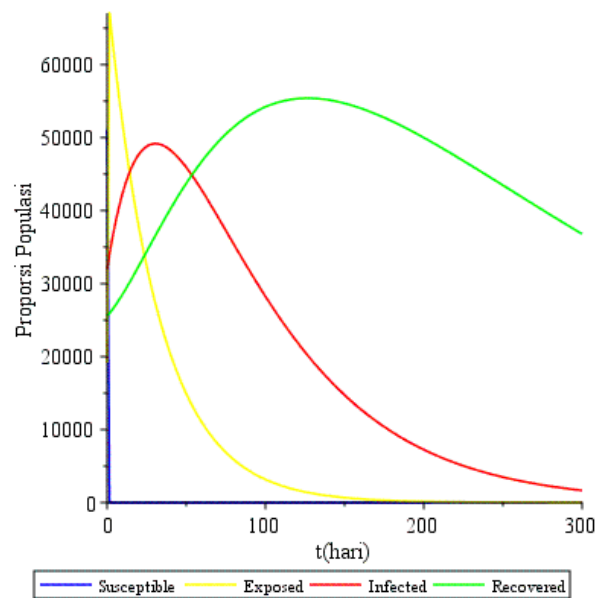
Tabel Simulasi dengan beberapa Parameter

Parameter	Percobaan			
	1	2	3	4
ρ	0	0	0,21	0,80
β	0,014	0,083	0,083	0,083
R_0	0,813	4,819	3,807	0,964
Gambar	Gambar 3.3	Gambar 3.4	Gambar 3.5	Gambar 3.6

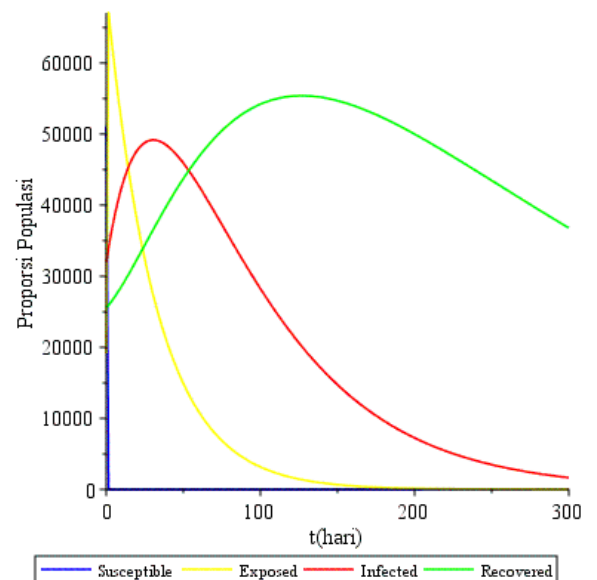
Dalam grafik, garis yang berwarna biru menunjukkan proporsi populasi manusia yang rentan $s(t)$, garis yang berwarna kuning menunjukkan proporsi populasi manusia laten $e(t)$, garis yang berwarna merah menunjukkan proporsi populasi manusia yang terinfeksi $i(t)$ dan garis yang berwarna hijau menunjukkan proporsi populasi manusia yang telah sembuh $r(t)$.



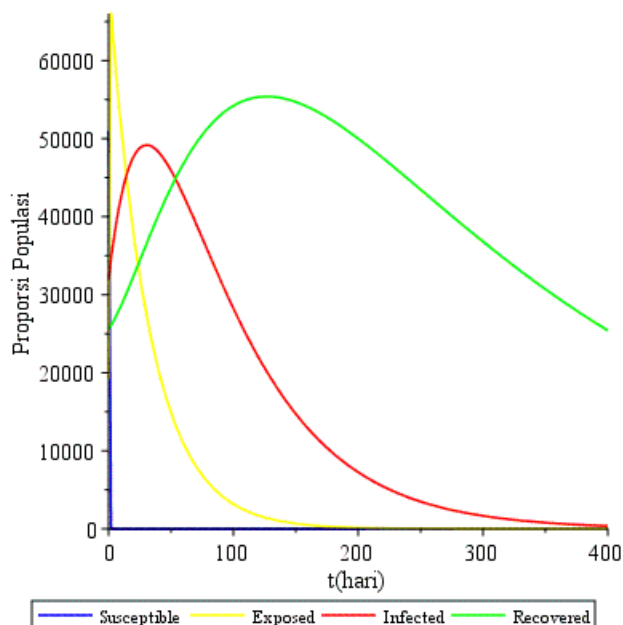
Gambar 3.3 Simulasi model dengan $\rho=0$ dan $\beta=0,014$



Gambar 3.4 Simulasi model dengan $\rho=0$ dan $\beta=0,083$



Gambar 3.5 Simulasi model dengan $\rho=0,21$ dan $\beta=0,083$

Gambar 3.6 Simulasi model dengan $\rho=0,80$ dan $\beta=0,083$

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

1. Terbentuk dua model matematika *SEIR* penyebaran penyakit malaria tanpa pemberian vaksinasi yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinier bebas penyakit ataupun yang endemik.
2. Terbentuk dua model matematika *SEIR* penyebaran penyakit malaria dengan pemberian vaksinasi yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinier bebas penyakit ataupun yang endemik.
3. Berdasarkan simulasi model matematika *SEIR* terlihat bahwa laju infeksi sangat berpengaruh dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium, semakin tinggi laju infeksi maka penyakit akan semakin menyebar dalam populasi dan semakin tinggi pemberian vaksinasi pada individu rentan maka kelas *Infected* akan menurun menuju nol. Jadi program pemberian vaksinasi pada penyebaran penyakit malaria dapat digunakan untuk mengendalikan penyakit tersebut.

Saran

Pada penelitian ini, simulasi model penyebaran penyakit malaria menggunakan parameter berdasar asumsi. Sehingga penelitian selanjutnya dapat mengambil data dari dinas kesehatan. Selain itu analisis sensitivitas model dapat dikerjakan untuk mengetahui parameter yang berpengaruh pada epidemi malaria.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Versions (10th ed)*. Book. John Wiley & Sons, Inc.
- Castellini, H & Romanelli, L. (2009). On the Propagation of Social Epidemic in Social. *Journal Networks under SIR Model*, 70: 40-53.
- Cogswell, F.B. (1992). *The Hypnozoite and Relapse in Primate Malaria*. *Clinical Microbiology Review*, V (1): 26-35
- Diekmann, O. dan Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. New York: John Wiley and Son.
- Driessche dan Watmough. (2002). Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 29-48.
- Harijanto, P. N. (2010). *Malaria dalam Ilmu Penyakit Dalam (4th ed)*. A.W. Sudoyo. Jakarta: FKUI Press.
- Oktavia, E. (2016). *Analisis Kestabilan dari Sistem Dinamik Model SEIR pada Penyebaran Penyakit Cacar Air (Varicella) dengan Pengaruh Vaksinasi*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.
- Older, G. J. & Woude, J. W. van der. (2004). *Mathematical Systems Theory*. Netherland: VVSD.
- Parera, M. & Tiala, M. E. (2012). Potensi Vaksin *Plasmodium Falciparum* Fase Pra-Eritrositer RTS,S Sebagai Imunoprofilaksis Pada Pelancong. *Institute for Supply Management*, V(1):31
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition. New York: Springer-Verlag.
- Pusat Data dan Informasi Kesehatan. (2016). *Malaria* (ISSN 2442-7659). Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.
- Putra, N.S. (1994). *Serangga di Sekitar Kita. Edisi Pertama*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.
- Putra, T.R.I. (2011). Malaria dan Permasalahannya. *Jurnal Kedokteran Syiah Kuala*, V (11): 106-107.
- Rochmatika, L. (2013). *Penyelesaian Numerik dan Analisis Kestabilan pada Model Epidemik SEIR dengan Penularan pada Periode Laten*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Rosriana, S. (2017). *Analisis Bifuraksi pada Penyebaran Penyakit Kolera dengan Model*

- SEIR*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.
- Ross, Sepley L. (2010). *Differential Equations*. Delhi: Rajv Book Binding House.
- Sari, A. (2012). Karakteristik Penderita Malaria Terhadap Kejadian Malaria di Kecamatan Suka Makmur Kabupaten Aceh Besar Tahun 2012. *Jurnal Kesehatan Masyarakat*, V (1): 1-2.
- Shah, N. H & Gupta, J. (2013). SEIR Model and Simulation for Vector Borne Diseases. *Applied Mathematics*. 4: 13-17.
- Singh, S.K. & Aqeel, S. (2011). A Study of Effects of Disease Caused Death in A Simple Epidemic Model. *International Journal of Science & Research*. 2: 1-3.
- Talawar, A.S. & Aundhakar, U.R. (2015). A Study of Malaria Epidemic Model Using the Effect of Lost Immunity. *International Journal of Scientific & Research*. 4: 1830.
- Tamrin, H. (2007). *Model SIR Penyakit Tidak Fatal*. Yogyakarta: Jurusan Matematika UGM.
- Widowati & Sutimin. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika Universitas Diponegoro.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag.