# ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL MATEMATIKA SIKLUS BISNIS TORRE

**Jurnal**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

**Oleh:**

**Ika Siwi Tira Ardiyani**

**NIM 14305141049**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

**2018**

# HALAMAN PENGESAHAN

Jurnal dengan judul

**"ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL MATEMATIKA SIKLUS BISNIS TORRE"**

disusun oleh:

Ika Siwi Tira Ardiyani
NIM 14305141049
Prodi Matematika

telah disetujui Dosen Pembimbing untuk memenuhi persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains.

Yogyakarta, 29 Agustus 2018

Disetujui,
Dosen Pembimbing,

**Dr. Hartono**
NIP. 19620329 198702 1 002

# ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL MATEMATIKA SIKLUS BISNIS TORRE

## *BIFURCATION ANALYSIS ON MATHEMATICAL MODELS OF THE BUSINESS CYCLE TORRE*

Oleh: Ika Siwi Tira Ardiyani[1], Dr. Hartono[2]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
ika.ardiyani@gmail.com[1], hartono@uny.ac.id[2]

### Abstrak

Matematika memiliki peran penting terhadap bidang ilmu tertentu, misalnya ekonomi. Salah satu penerapannya yaitu digunakan untuk mengetahui keadaan pertumbuhan ekonomi yang dapat dipantau melalui kenaikan pendapatan, suku bunga, inflasi, dan stok modal. Hal tersebut dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematika. Beberapa model matematika pada siklus bisnis telah dikemukakan oleh Kaldor-Kalecki, Gabrisch and Lorentz, Cai dan Torre. Model matematika yang dikemukakan oleh Torre mendasarkan bahwa pertumbuhan ekonomi dapat dipantau berdasarkan kenaikan pendapatan dan suku bunga. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui kestabilan titik ekuilibrium dan jenis bifurkasi yang terjadi pada model matematika pada siklus bisnis Torre yang telah dimodifikasi. Hasil analisis menunjukkan bahwa terdapat tiga sifat titik ekuilibrium, yaitu *stable spiral* saat $0.35 < l_1 < 0.65$, *unstable spiral* saat $0 < l_1 < 0.35$ dan *center* saat $l_1 = 0.35$ dimana $l_1$ adalah tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan. Dengan memvariasikan parameter $l_1$ terlihat terjadi bifurkasi yaitu ditandai dengan bervariasinya sifat kestabilan titik ekuilibrium. Bifurkasi yang terjadi dikategorikan sebagai *unfolding* jenis kedua.

Kata kunci: *stable spiral, unstable spiral, center, unfolding.*

### *Abstract*

*Mathematics has a significant role against specific fields, such as economics. One application that is used to find out the State of economic growth can be monitored through the increase in income, interest rates, inflation, and the stock of capital. It can be modelled into a form of mathematics. Some of the mathematical model on business cycle has put forth by Kaldor-Kalecki, Gabrisch and Lorentz, Cai and Torre. A mathematical model proposed by Torre, basing that economic growth can be monitored on the basis of the increase in income and interest rates. The purpose of this research is knowing the equilibrium point and stability of a type of bifurcation that occurs in mathematical models in the business cycle Torre have been modified. The result of the analysis show that there are three properties of the equilibrium point are stable spiral when* $0.35 < l_1 < 0.65$*, unstable spiral at the moment* $0 < l_1 < 0.35$ *and center at the time of* $l_1 = 0.35$*, which* $l_1$ *is the growth rate of deposits against income. By varying the parameter bifurcation occurs i.e. visible* $l_1$ *marked with the affordable nature of the stability of equilibrium points. Bifurcation that occurs the second type is categorized as unfolding.*

*Keywords: stable spiral, unstable spiral, center, unfolding.*

## PENDAHULUAN

Matematika memiliki peranan yang penting terhadap kehidupan sehari-hari ataupun pada bidang ilmu tertentu. Peranan tersebut dapat membantu untuk memperoleh gambaran terhadap solusi pada suatu permasalahan di dalam dumia nyata yang telah dibentuk ke dalam model matematika. Menurut Eck (2017: 1), pemodelan matematika merupakan terjemahan dari permasalahan tertentu dari ilmu-ilmu alam (eksperimen fisika, kimia, biologi, geosains), ilmu-ilmu sosial, atau teknologi menjadi masalah matematika yang didefinisikan dengan baik. Peran pemodelan matematika yang akan dibahas pada penelitian ini merupakan pemodelan matematika pada bidang ekonomi.

Ekonomi merupakan suatu ilmu yang mempelajari tentang upaya manusia untuk memenuhi kebutuhan hidupnya yang tidak terbatas dengan sumber daya yang terbatas (Ragan & Lipsey, 2017: 4). Menurut permasalahannya ilmu ekonomi dikelompokkan menjadi dua, yaitu mikroekonomi dan makroekonomi. Ilmu makroekonomi merupakan ilmu tentang penentuan agregat ekonomi, output total, lapangan kerja total, tingkat harga dan laju pertumbuhan ekonomi (Ragan & Lipsey, 2017: 9). Berdasarkan indikator yang terdapat pada bidang makroekonomi dapat dipantau aktivitas perekonomian suatu negara dari laju pertumbuhan ekonominya.

Setiap pemerintahan mengharapkan aktivitas perekonomian negaranya bersifat ideal, yakni tumbuh terus-menerus tanpa mengalami penurunan. Namun faktanya, perekonomian pada suatu negara bersifat fluktuatif. Naik turunnya aktivitas ekonomi tersebut dapat dipantau melalui perkembangan tingkat output dan harga yang terjadi pada pasar barang dan jasa. Selain itu aktivitas ekonomi dapat dipantau melalui indikator yang terdapat pada bidang makroekonomi. Suatu aktivitas ekonomi dikatakan naik ketika daya beli masyarakat meningkat dan inflasi juga bergerak meningkat. Sebaliknya, aktivitas ekonomi dikatakan menurun ketika daya beli masyarakat juga menurun. Perubahan aktivitas ekonomi yang semula naik saja atau turun saja dalam ilmu matematika dapat dikategorikan sebagai bifurkasi. Dengan kata lain, bifurkasi merupakan perubahan kestabilan suatu sistem. Sedangkan dalam ilmu ekonomi, gerakan naik turun yang terjadi disebut dengan siklus bisnis (*The Business Cycle*) (Seftarita, 2014:7-8)..

Hubungan antar indikator yang terdapat pada siklus bisnis dapat dimodelkan secara matematis. Salah satu model ekonomi makro yang terkenal adalah model siklus bisnis IS-LM (Investment Saving-Liquidity Money). Menurut Usadha & Tari (2007: 9), model siklus bisnis IS-LM merupakan sistem dinamik yang melibatkan fungsi investasi (I), fungsi simpanan (S), fungsi permintaan uang (L), dan persediaan uang (M). Penelitian tersebut berisi tentang persamaan karakteristik yang diperoleh dari model tidak dapat diselesaikan secara eksak, sehingga diperlukan pendekatan linier dan pendekatan dalam ruang kompleks (analisa bifurkasi hopf). Selain itu, peneliti dapat memberi jaminan terhadap adanya limit cycle, dan terjadinya bifurkasi Hopf pada saat T melewati $T_{bif}$.

Penelitian yang lainnya yaitu oleh Puri Mahestyanti (2015) yang berisi tentang adanya empat model siklus bisnis ekonomi, diantaranya siklus bisnis Kaldor-Kalecki, Gabrisch and Lorentz, Cai dan Torre. Model yang digunakan pada penelitian tersebut merupakan model siklus bisnis Gabisch and Lorentz dengan menggunakan parameter-parameter yang telah diberikan oleh Cai. Hasil dari penelitian tersebut terdapat sebuah nilai kritis tunda $\tau_0$ yang mengakibatkan perubahan kestabilan ketika nilai $\tau = \tau_0$ muncul sebuah limit cycle.

Selanjutnya pada artikel ini menggunakan model matematika siklus bisnis yang dikemukakan oleh V. Torre atau dapat disebut dengan siklus bisnis Torre yang berbentuk (V. Torre , 1977: 1459):

$$\frac{dY}{dt} = \alpha\Big(I\big(Y(t),R(t)\big) - S\big(Y(t),R(t)\big)\Big)$$
$$\frac{dR}{dt} = \beta\big(L\big(Y(t),R(t)\big) - L_s\big) \quad (1)$$

dengan $I\big(Y(t),R(t)\big)$ merupakan fungsi investasi yang bergantung pada pendapatan dan suku bunga. $S\big(Y(t),R(t)\big)$ merupakan fungsi simpanan yang bergantung pada pendapatan dan suku bunga. $L\big(Y(t),R(t)\big)$ merupakan fungsi permintaan uang yang bergantung pada pendapatan dan suku bunga. $L_s$ merupakan konstanta persediaan uang. $\alpha$ merupakan percepatan akibat kelebihan atau kekurangan investasi. $\beta$ merupakan percepatan akibat kelebihan atau kekurangan permintaan uang. $\frac{dY}{dt}$ merupakan laju kenaikan pendapatan. $\frac{dR}{dt}$ merupakan laju kenaikan suku bunga.

Model matematika tersebut akan dianalisa tentang kestabilan titik ekuilibriumnya dan bifurkasi yang terjadi apabila salah satu parameternya divariasikan.

## KAJIAN PUSTAKA

### A. Istilah-istilah Ekonomi

Menurut Mankiw (2013:605), suku bunga dikategorikan menjadi dua, yaitu suku bunga pinjaman dan suku bunga tabungan. Suku bunga pinjaman merupakan jumlah uang yang harus dibayarkan kepada pemberi pinjaman dari uang yang dipinjamkan. Sedangkan suku bunga tabungan merupakan penambahan uanng yang didapatkan dari jumlah uang yang telah ditabung. Sehingga diperoleh fungsi investasi (2) dan fungsi simpanan (3) sebagai berikut

$$I\big(Y(t),R(t)\big) = \eta Y - \beta_1 R \quad (2)$$

$$S\big(Y(t),R(t)\big) = l_1 Y + \beta_2 R \quad (3)$$

dengan $\eta$ merupakan tingkat pertumbuhan investasi terhadap pendapatan. $\beta_1$ merupakan tingkar penurunan investasi terhadap suku bunga. $l_1$ merupakan tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan. $\beta_2$ merupakan tingkat pertumbuhan simpanan terhadap suku bunga.

Menurut Boediono (1982: 82), permintaan uang adalah kebutuhan masyarakat akan uang tunai untuk menunjang kegiatan ekonominya. Sehingga diperoleh fungsi permintaan uang sebagai berikut

$$L\big(Y(t),R(t)\big) = l_2 Y - \beta_3 R \quad (4)$$

dengan $l_2$ merupakan tingkat pertumbuhan permintaan uang terhadap pendapatan. $\beta_3$ merupakan tingkat penurunan permintaan uang terhadap suku bunga.

## B. Klasifikasi Titik Ekuilibrium

Diberikan suatu sistem linier yaitu

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy. \tag{5}$$

dengan $\dot{x}$ merupakan turunan pertama variabel $x$ terhadap waktu $(t)$ dan $\dot{y}$ merupakan turunan pertama terhadap waktu $(t)$. Sistem (5) memiliki matriks Jacobian $(J)$ sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(ax+by)}{\partial x} & \frac{\partial(ax+by)}{\partial y} \\ \frac{\partial(cx+dy)}{\partial x} & \frac{\partial(cx+dy)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{6}$$

Misalkan $p$ merupakan *trace* dari $J$, $q$ merupakan determinan dari $J$, dan $\Delta$ merupakan diskriminan dari persamaan karakteristik matriks $J$. Maka sifat titik ekuilibrium dapat diklasifikasikan sebagai Tabel 1 (Jordan & Smith, 2007: 71)

**Tabel 1** Klasifikasi Titik Ekuilibrium

| **Jenis kestabilan** | $\boldsymbol{p = a + d}$ | $\boldsymbol{q = ad - bc}$ | $\boldsymbol{\Delta = p^2 - 4q}$ |
|---|---|---|---|
| *Saddle* | | $q < 0$ | $\Delta > 0$ |
| *Stable node* | $p < 0$ | $q > 0$ | $\Delta > 0$ |
| *Stable spiral* | $p < 0$ | $q > 0$ | $\Delta < 0$ |
| *Unstable node* | $p > 0$ | $q > 0$ | $\Delta > 0$ |
| *Unstable spiral* | $p > 0$ | $q > 0$ | $\Delta < 0$ |
| *Centre* | $p = 0$ | $q > 0$ | $\Delta < 0$ |
| *Degenerate stable node* | $p < 0$ | $q > 0$ | $\Delta = 0$ |
| *Degenerate unstable node* | $p > 0$ | $q > 0$ | $\Delta = 0$ |

## C. Bifurkasi pada Sistem Linier

Menurut Hale & Kocak (1991: 249-252), sistem linier yang bergantung pada satu parameter $(\mu)$ dapat diklasifikasikan menjadi dua kondisi berdasarkan nilai *trace(tr)* dan *determinan*nya(det). Misalkan $A(\mu)$ merupakan matriks yang bergantung pada parameter $\mu$ yang diperoleh dari matriks Jacobian suatu sistem, maka diperoleh:

1. Kondisi pertama, *unfolding* $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Setiap matriks $A$ yang bergantung pada parameter $\mu$, yang memenuhi $A_\mu = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ atau $tr(A(\mu)) < 0$ dan $\det(A(\mu)) < 0$ atau $tr(A(\mu)) < 0$ dan $\det(A(\mu)) > 0$, maka secara topologi akan ekuivalen dengan matriks $A_0$.

2. Kondisi kedua, *unfolding* $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Setiap matriks $A$ yang bergantung pada parameter $\mu$, yang memenuhi $A_\mu = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$ atau $tr(A(\mu)) < 0$ dan $\det(A(\mu)) > 0$ atau $tr(A(\mu)) > 0$ dan $\det(A(\mu)) > 0$, maka secara topologi akan ekuivalen dengan matriks $A_0$.

Menurut Lynch (2010: 97), berikut ini merupakan kriteria Bendixson. Diberikan suatu sistem

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y) \tag{6}$$

dan misalkan D adalah daerah yang terhubung dan

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \neq 0$$

di D, jika $F_x + G_y$ memiliki tanda yang sama pada D, maka tidak terdapat limit cycle pada daerah D.

# PEMBAHASAN

## A. Formulasi Model

Berikut ini diberikan pada Tabel 2 mengenai daftar variabel dan parameter yang akan digunakan pada penelitian ini.

**Tabel 2** Definisi Variabel dan Parameter

| Var & Par | Definisi | Syarat |
|---|---|---|
| $R$ | Kenaikan suku bunga acuan (satuan yang digunakan merupakan nilai dari basis poin). | [0,4] |
| $Y$ | Kenaikan pendapatan(satuan yang digunakan merupakan satuan unit mata uang). | [0,4] |
| $\alpha$ | Percepatan akibat kelebihan atau kekurangan investasi. | [0,3] |
| $\beta$ | Percepatan suku bunga akibat kekurangan atau kelebihan permintaan uang. | [0,2] |
| $\eta$ | Tingkat pertumbuhan investasi terhadap pendapatan. | [0,1] |
| $l_1$ | Tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan. | [0,1] |
| $l_2$ | Tingkat pertumbuhan permintaan uang terhadap pendapatan. | [0,1] |
| $\beta_1$ | Tingkat penurunan investasi terhadap suku bunga acuan. | [0,1] |
| $\beta_2$ | Tingkat pertumbuhan simpanan terhadap suku bunga acuan. | [0,1] |
| $\beta_3$ | Tingkat penurunan permintaan uang terhadap suku bunga acuan. | [0,1] |
| $L_s$ | Konstanta persediaan uang. | [0,1] |

Formulasi model matematika pada siklus bisnis Torre pada penelitian ini memiliki beberapa asumsi, yaitu:

1. Kenaikan suku bunga acuan yang terjadi pada model ini memiliki satuan yaitu nilai dari basis poin (bps). jika output pada kenaikan suku bunga acuan tertulis 0.25, artinya kenaikan suku bunga acuan yang terjadi sebesar 0.25%.
2. Kenaikan pendapatan yang terjadi pada model memiliki satuan yaitu satuan unit mata uang.
3. Pembahasan yang dilakukan hanya sebatas pada kenaikan atau pertumbuhan suku bunga acuan dan pertumbuhan pendapatan.

Berdasarkan istilah-istilah ekonomi yang telah disebutkan, maka diperoleh model matematika pada siklus bisnis Torre yang telah dimodifikasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha\big((\eta - l_1)Y - (\beta_1 + \beta_2)R\big) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta(l_2 Y - \beta_3 R - L_s) \end{aligned} \tag{7}$$

**B. Penentuan Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya**

Untuk menentukan titik ekuilibrium berdasarkan model pada sistem (7) maka

$$\frac{dY}{dt} = 0 \; dan \; \frac{dR}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibriumnya yaitu

$$E(\hat{R}, \hat{Y}) = \left(\frac{(\eta - l_1)L_s}{(\beta_1 + \beta_2)l_2 - (\eta - l_1)\beta_3}, \frac{(\beta_1 + \beta_2)L_s}{(\beta_1 + \beta_2)l_2 - (\eta - l_1)\beta_3}\right) \tag{8}$$

**C. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium**

Kestabilan titik ekuilibrium (8) dapat diketahui dengan cara menganalisa matriks Jacobian pada sistem. Berdasarkan sistem (7) maka diperoleh matriks Jacobian yaitu

$$J = \begin{bmatrix} \alpha(\eta - l_1) & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

yang memiliki *trace (p)* dan determinan (q) serta diskriminan ($\Delta$) sebagai berikut

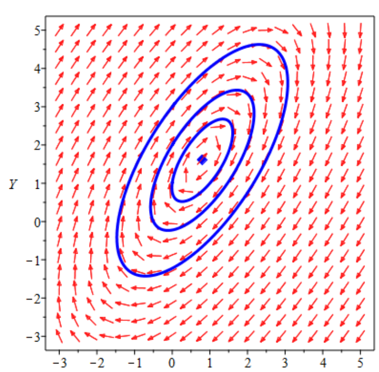
**Tabel 3.** Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem (7)

| **Jenis kestabilan** | $\boldsymbol{p = a + d}$ | $\boldsymbol{q = ad - bc}$ | $\boldsymbol{\Delta = p^2 - 4q}$ |
|---|---|---|---|
| *Center* | $\alpha(\eta - l_1) - \beta\beta_3 = 0$ | $\alpha\beta\beta_3(\eta - l_1) + \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) > 0$ | $\Delta < 0$ |
| *Stable spiral* | $\alpha(\eta - l_1) - \beta\beta_3 < 0$ | $\alpha\beta\beta_3(\eta - l_1) + \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) > 0$ | $\Delta < 0$ |
| *Unstable spiral* | $\alpha(\eta - l_1) - \beta\beta_3 > 0$ | $\alpha\beta\beta_3(\eta - l_1) + \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_2) > 0$ | $\Delta < 0$ |

## D. Simulasi Model

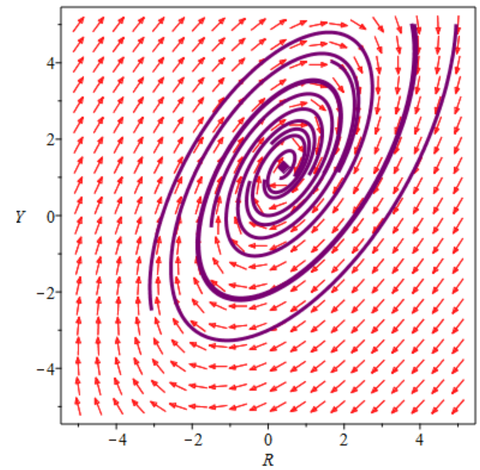
Simulasi model pada jurnal ini menggunakan beberapa nilai parameter konstan dan memvariasikan parameter $l_1$ yang terdapat pada model. Adapun nilai parameter tersebut adalah $\alpha = 2, \beta_1 = 0.25, \beta_2 = 0.35, \beta = 1.5, l_2 = 0.45, \beta_3 = 0.4, L_s = 0.4, \eta = 0.65$.

Untuk nilai $l_1 = 0.35$, maka diperoleh *potrait phase* pada Gambar 1 dengan titik ekuilibrium $E(0.8, 1.6)$. Hal ini menunjukkan bahwa pertumbuhan ekonomi dikatakan stabil jika kenaikan suku bunga acuan sebesar 0.8% dan kenaikan pendapatan sebesar 1.6 satuan unit mata uang. Jika diambil sebarang nilai awal kenaikan suku bunga acuan dan kenaikan pendapatan, maka kondisi perekonomian yang terjadi di masa depan akan terus fluktuatif dan tidak mendekati titik stabil.



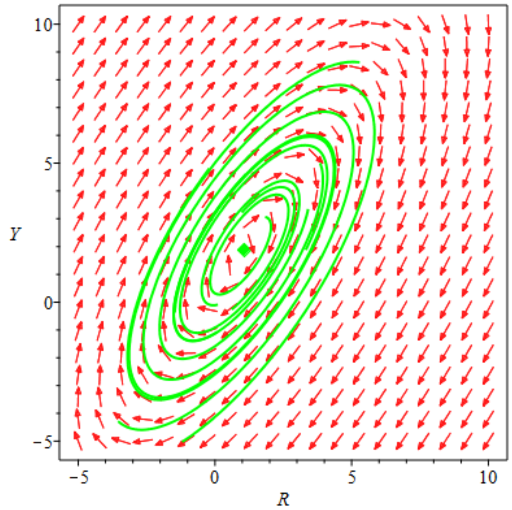

**Gambar 1.** *Potrait phase* $l_1 = 0.35$

Untuk nilai $l_1 = 0.45$, maka diperoleh *potrait phase* pada Gambar 2 dengan titik ekuilibrium $E(0.42, 1.26)$. Hal ini menunjukkan bahwa pertumbuhan ekonomi dikatakan stabil jika kenaikan suku bunga acuan sebesar 0.42% dan kenaikan pendapatan sebesar 1.26 satuan unit mata uang.




**Gambar 2.** *Potrait phase* $l_1 = 0.45$

Untuk nilai $l_1 = 0.3$, maka diperoleh *potrait phase* pada Gambar 3 dengan titik ekuilibrium $E(1.08, 1.85)$, yang berarti terjadi kenaikan suku bunga acuan sebesar 1.08% dan kenaikan pendapatan sebesar 1.85 satuan unit mata uang. Kenaikan suku bunga acuan yang melebihi 1% akan mengganggu pertumbuhan ekonomi, karena suku bunga pinjaman akan ikut meningkat dan mengakibatkan peningkatan resiko kredit yang bermasalah




**Gambar 3.** *Potrait phase* $l_1 = 0.3$

Berdasarkan simulasi tersebut diperoleh klasifikasi *trace* dan determinan sebagai berikut

**Tabel 4.** *Trace* dan Determinan Hasil Simulasi

| *parameter* | *trace* $(tr)$ | determinan (det) |
|---|---|---|
| $l_1 = 0.35$ | 0 | 0.45 |
| $l_1 = 0.45$ | $-0.2$ | 0.57 |
| $l_1 = 0.3$ | 0.1 | 0.39 |

Berdasarkan nilai *trace* dan determinan tersebut maka model matematika pada siklus bisnis Torre tergolong memiliki bifurkasi *unfolding* kondisi kedua.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, model matematika pada siklus bisnis Torre memiliki satu titik ekuilibrium yang bersifat *stable spiral, unstable spiral*, dan *center* apabila parameter $l_1$divariasikan. Perubahan kestabilan yang terjadi tersebut membuat model matematika pada siklus bisnis Torre ini mengalami bifurkasi yang dikategorikan sebagai *unfolding* jenis kedua.

## DAFTAR PUSTAKA


Anton, H. (2004). Aljabar Linear Elementer, edisi kelima (Terjemahan Pantur Silaban, Ph.D). Jakarta: Erlangga.

Anton, H. & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra Aplication Version 11th edition.* United States of America: Wiley.

Boediono. (1982). Pengantar Ilmu Ekonomi No.2 Ekonomi Makro, Edisi Keempat. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

Boyce, W.E. & Diprima, R.C. (2008). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems ninth edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Eck, C., Garcke, H. & Knabner, P. (2017). *Mathematical Modeling.* Switzerland: Springer.

Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1985). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer.

Hale, J. & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York : Springer-Verlag.

Hirsch, M.W., Smale, S. & Devaney, R.L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos third edition.* Elsevier: United States.

Jordan, D.W. & Smith, P. (2007). *Nonlinear Ordinary Differential Equations, fourth edition.* New York: Oxford University Press, Inc.

Krawiec & Szydlowski. (2014). *A Krawiec-Szydlowski Model of Business Cycles with a time delay in capital stock. IMA Journal of Applied Mathematics, vol 79, 571-599.*

Lynch, Stephen. (2010). *Dynamical Systems with Applications using Maple*. Second Edition. Berlin : Birkhauser.

Mankiw, N.G.(2013). *Macroeconomics*. New York: Worth Publisher.

Nopirin. (2000). *Pengantar Ilmu Ekonomi Makro dan Mikro.*Yogyakarta: BPFE.

Puri Mahestyanti (2015). Bifurkasi *Hopf* pada Model Siklus Bisnis IS-LM Tanpa dan dengan Waktu Tunda. Skripsi, Institut Pertanian Bogor, Bogor.

Olsder, G.J., (2004). *Mathematical System Theory intermediate third edition.* Netherlands: VSSD.

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems third edition*. New York: Springer-Verlag.

Ragan, C.T.S. & Lipsey, R.G. (2011). *Economics, Thirteenth Canadian Edition.* Toronto: Pearson Canada.

Ross, Shepley L. 2010. *Differential Equations Third Edition*. New York: John Wiley dan Sons.

Seftarita, Chenny. (2014). Kebijakan Ekonomi Makro dan Siklus Bisnis; Kajian Teori dan Studi Empiris. Banda Aceh: Syiah Kuala University Press.

Seydel, Rudiger. (2010). *Practical Bifurcation and Stability Analysis.* 3rd Edition. New York : Springer.

Sunarto & Setiono, B. (2007). Ekonomi Makro edisi ketiga. Bogor: Pusdiklatwas BPKP.

Torre, V. (1977). Existence of Limit Cycles and Control in Complete Keynesian System by Theory of Bifurcations. *Econometrica, vol 45, No.6, 1457-1466.*

Usadha, I.G.N.R., Tari T, N.K.T. (2007). Model Siklus Bisnis IS-LM Dengan Persamaan Diferensial Tundaan. *J.Math. and Its Appl., vol 4, No.2, 9-15.*

Wibisono, Y. (1999). Manual Matematika Ekonomi. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Widowati dan Sutimin. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Jurusan Matematika Universitas Diponegoro.