ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL MATEMATIKA KOMPETISI ANTAR DUA POPULASI

ANALYSIS OF BIFURCATION ON MATHEMATICAL MODEL OF TWO POPULATION COMPETITION

Oleh: Retno Ambarwati[1], Dr. Hartono[2]
[1]Mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta
[2]Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta
E – mail : [1]retnoa198@gmail.com, [2]hartono@uny.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis model matematika sistem kompetisi antar dua populasi dan mengetahui jenis bifurkasi sistem tersebut apabila parameter tingkat kematian populasi karena persaingan antar individu divariasikan.

Model matematika kompetisi antar dua populasi memiliki empat titik ekuilibrium yang keberadaan tiga diantaranya bergantung pada tingkat kematian kedua populasi karena persaingan antar individu dan satu titik ekuilibrium lainnya tidak bergantung pada tingkat kematian kedua populasi karena persaingan antar individu. Kestabilan titik ekuilibrium ditentukan berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Perubahan kestabilan titik ekuilibrium dan perubahan banyaknya titik ekuilibrium sebagai penanda terjadinya bifurkasi. Selain itu, simulasi dilakukan untuk beberapa pasang nilai tingkat kematian karena persaingan antar.

Hasil perhitungan nilai eigen dari hasil linearisasi dan hasil analisis secara numerik dari sistem kompetisi dua populasi dengan parameter tingkat kematian kedua populasi karena persaingan antar individu yang divariasikan menunjukkan terjadinya bifurkasi pada sistem kompetisi antar dua populasi. Apabila tingkat kematian populasi jenis I kurang dari tingkat kematian populasi jenis II maka populasi jenis II akan punah dan terdapat tiga titik ekuilibrium, apabila tingkat kematian populasi jenis I sama dengan tingkat kematian populasi jenis II maka terdapat dua kondisi yaitu : 1) Populasi jenis I dan populasi jenis II hidup bersama dengan empat titik ekuilibrium atau tak hingga banyak titik ekuilibrium, 2) Populasi jenis I akan punah ketika populasi awal jenis II lebih besar dari populasi awal jenis I dan terdapat empat titik ekuilibrium sedangkan populasi jenis II akan punah ketika populasi awal jenis I lebih besar dari populasi awal jenis II dan terdapat empat titik ekuilibrium, selanjutnya apabila tingkat kematian populasi jenis I kurang dari tingkat kematian populasi jenis II maka populasi jenis I akan punah dan terdapat tiga titik ekuilibrium.

Kata kunci : Sistem kompetisi, titik ekuilibrium, nilai eigen, bifurkasi

Abstract

This research aims to analyze the mathematical model of competition system between two populations and to know the type of bifurcation of the system if the parameter of mortality rate the population because of the competition between individuals is varied.

The mathematical model of competition between the two populations has four equilibrium points where the existence of three points depends on the mortality rate of the two populations because the competition between individuals and one other is not dependent on the mortality rate of the two populations because of the competition between individuals. The stability of the equilibrium point is determined based on the eigen value from the result of the linearization around the equilibrium point. The change in stability of the equilibrium point and the change in the number of equilibrium points as a *marker of the occurrence of bifurcation. In addition, the simulation is performed for several pairs of mortality rate because the competition between individuals.*

The results of calculating eigenvalues from the result of the linearizationand numerical results of the competition system between two populations with the parameters of the mortality rate of the two populations because the competition between individuals being varied will indicate the occurrence of bifurcation in the competition system between two populations. If the mortality rate of type I population is less than the mortality rate of population type II then the population of type II will be extinct and there are three equilibrium points, if the mortality rate of population of type I is equal to the level of mortality of population type II then there are two conditions: 1) Population type I and type II living together with four equilibrium points or infinity equilibrium points, 2) Population type I will be extinct when the initial population of type II is larger than the initial population of type I and there are four equilibrium points and population type II will become extinct when the initial population of type I is larger than the initial population of type II, if the mortality rate of the type I population is less than the mortality rate of population type II then the population of type I will become extinct and there are three equilibrium points.

***Keywords**: Competition system, equilibrium point, eigenvalues, bifurcation*

PENDAHULUAN

Ekologi merupakan salah satu cabang ilmu biologi yang mempelajari makhluk hidup seperti manusia, hewan dan tumbuhan yang hidup bersama dan saling mempengaruhi di dalam lingkungannya. Makhluk hidup tunggal biasa disebut individu, dan populasi merupakan kumpulan individu sejenis yang berinteraksi pada tempat dan waktu yang sama. Berbagai populasi dari spesies yang berbeda dan hidup bersama disebut komunitas. Satu kelompok yang memiliki ciri khas tertentu dan terdiri dari beberapa komunitas yang berbeda dikenal dengan ekosistem. Bertambahnya anggota populasi menyebabkan kepadatan populasi bertambah sehingga antar individu harus bersaing untuk mencukupi kebutuhan hidup. Kompetisi dalam suatu ekosistem merupakan salah satu bentuk interaksi antar individu yang bersaing memperebutkan kebutuhan hidup yang sama. Pada individu hewan, kebutuhan hidup yang sering diperebutkan antara lain adalah makanan, sumber air, tempat berlindung atau bersarang dan pasangan untuk kawin.

Model kompetisi dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu dalam satu populasi dan persaingan antar dua populasi untuk mendapatkan kebutuhan hidupnya (J. N. Kapur, 2000). Model kompetisi dikenal juga sebagai Model Lotka – Volterra (Ferdinand Verhulst, 1989). Beberapa penelitian yang pernah membahas terkait model Lotka – Volterra yaitu Analisis Kestabilan dan *Limit Cycle* pada Model Predator – Prey Tipe Gause. Hasil dari penelitian ini yaitu titik setimbang stabil terjadi pada saat jumlah individu populasi pemangsa dan mangsa tidak nol dan jenis kestabilannya termasuk kriteria stabil. Sedangkan model tipe Gause akan mempunyai *limit cycle* jika percepatan pertumbuhan populasi mangsa tidak sama dengan perlambatan (percepatan dengan tanda negatif) populasi pemangsa, atau sebaliknya (Fathurohmawan Rosyid, 2012).

Penelitian lainnya yaitu Kestabilan Populasi Model Lotka – Volterra Tiga Spesies dengan Titik Kesetimbangan. Hasil penelitian ini yaitu kestabilan pada titik kesetimbangan dan bidang koordinat melalui analisis numerik. Selanjutnya diberikan beberapa contoh numerik, yang menunjukkan bahwa solusi yang diperoleh menggunakan nilai parameter memberikan gambaran tentang perkembangan ketiga spesies (Ritanica Monica, 2014).

Penelitian selanjutnya yaitu Analisis Bifurkasi pada Model Matematis *Predator – Prey* dengan Dua *Predator*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa bifurkasi yang terjadi pada model tersebut dapat dilihat dari adanya perubahan banyaknya titik ekuilibrium dan perubahan kestabilan titik ekuilibrium, namun tidak dapat ditentukan nama bifurkasinya karena perilaku pada model tersebut yang berbeda dengan perilaku sistem yang mengalami bifurkasi secara umum (Lia Listyana, 2016).

Seperti yang telah dipaparkan di atas, bahwa suatu kompetisi adalah interaksi antar individu dalam satu populasi dan interaksi antar populasi yang bersaing memperebutkan kebutuhan hidup yang sama seperti makanan, tempat berlindung, dll, dengan spesies satu tidak memakan spesies lainnya, sehingga interaksi antara kambing dan sapi yang memakan rumput di wilayah yang sama atau harimau dan singa dalam berburu mangsa yang sama dapat dirumuskan dalam model kompetisi antar dua populasi. (G. L. Clarke, 1954).

Terdapat beberapa model matematika dalam suatu ekologi contohnya model kompetisi dan model *predator – prey*. Hal yang membedakan kedua model tersebut yaitu pada model kompetisi terdapat parameter yang mendefinisikan interaksi antara populasi satu dan populasi yang lain sedangkan pada model *predator – prey* tidak terdapat parameter yang mendefinisikan keadaan tersebut, yaitu interaksi antara populasi satu dan populasi yang lain. Bentuk dari model matematika kompetisi antar dua populasi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk (Eka Nila L. N., 2013) :

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx - cy)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(p - qx - ry)$$

dengan definisi variabel dan parameter dalam model matematika kompetisi antar dua populasi disajikan dalam Tabel 1 berikut ini :

Tabel 1. Definisi Variabel dan Parameter

Variabel dan Parameter	Definisi	Syarat
t	Waktu	$t > 0$
x	Populasi jenis I	$x > 0$
y	Populasi jenis II	$y > 0$
a	Tingkat kelahiran populasi jenis I	$a > 0$
p	Tingkat kelahiran populasi jenis II	$p > 0$
b	Tingkat kematian populasi jenis I karena persaingan antar individu	$b > 0$
c	Tingkat kematian populasi jenis I karena interaksi dengan populasi jenis II	$c > 0$
q	Tingkat kematian populasi jenis II karena interaksi dengan populasi jenis I	$q > 0$
r	Tingkat kematian populasi jenis II karena persaingan antar individu	$r > 0$

Karena memiliki beberapa parameter, sehingga sistem kompetisi antar dua populasi memiliki kemungkinan terjadinya perubahan kestabilan titik ekuilibrium atau sering disebut bifurkasi apabila parameternya divariasikan. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan menganalisis bifurkasi pada model matematika kompetisi antar dua populasi dengan dua parameter yang divariasikan yaitu tingkat kematian populasi jenis I dan jenis II karena persaingan antar individu.

PEMBAHASAN

Dalam membentuk model matematika kompetisi antar dua populasi, asumsi dasar yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Populasi yang dibicarakan berupa populasi hewan.
2. Jumlah populasi meningkat karena faktor kelahiran, dan jumlah populasi menurun karena faktor kematian yang diakibatkan oleh persaingan antar individu dalam populasi maupun persaingan antar dua spesies.
3. Diasumsikan faktor – faktor seperti bencana alam, kematian alami, migrasi dan lain – lain tidak diperhitungkan dalam model.
4. Dalam kompetisi antar dua populasi ini, hal yang diperebutkan adalah sumber makanan yang terbatas.

Model matematika kompetisi antar dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu – individu dalam suatu populasi atau persaingan antar dua populasi untuk memenuhi kebutuhan hidupnya. Berdasarkan asumsi – asumsi dan parameter yang digunakan maka dapat dikontruksi model matematika kompetisi antar dua populasi. Model kompetisi antar dua populasi direpresentasikan dengan sistem persamaan differensial biasa nonlinear autonomous seperti berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - bx - cy) \\ \frac{dy}{dt} &= y(p - qx - ry) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

A. Sistem dengan Dua Parameter Bebas

Pada kasus ini beberapa parameter pada sistem (4.1) akan dibuat bernilai tetap *(fixed)* seperti pada Tabel 2 sehingga hanya tersisa dua parameter bebas yakni b dan r. Nilai – nilai parameter ini diambil antara rentang 0 sampai dengan 1 karena parameter – parameter tersebut merepresentasikan tingkat dengan nilai pasti yaitu 1.

Tabel 1 Nilai Parameter pada sistem (4.1)

Parameter	Nilai Parameter	Parameter	Nilai Parameter
a	0.75	p	0.75
c	0.75	q	0.75

Dengan demikian sistem menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(0.75 - bx - 0.75y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(0.75 - 0.75x - ry) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

B. Titik Ekuilibrium Model Kompetisi antar Dua Populasi

Berdasarkan definisi (Wiggins, 2003), titik ekuilibrium pada model matematika dari kompetisi antar dua populasi diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Sehingga diperoleh titik ekuilibrium dari model matematika kompetisi yaitu :

1. $E_1 = (0,0)$, yaitu mewakili kondisi saat populasi pertama (x) dan kedua (y) tidak ada atau punah.
2. $E_2 = \left(\frac{0.75}{b}, 0\right)$, yaitu mewakili kondisi saat populasi pertama (x) ada dan populasi kedua (y) punah.
3. $E_3 = \left(0, \frac{0.75}{r}\right)$, yaitu mewakili kondisi saat populasi pertama (x) punah dan populasi kedua (y) ada.
4. $E_4 = \left(\frac{3(4r-3)}{16br-9}, \frac{3(4b-3)}{16br-9}\right)$, yaitu mewakili kondisi saat populasi pertama (x) dan kedua (y) ada atau hidup bersama.

C. Analisis Kestabilan Model Kompetisi antar Dua Populasi

Kestabilan titik ekuilibrium dari sistem (4.2) dapat diperiksa dengan menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari sistem tersebut yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} 0.75 - 2bx - 0.75y & -0.75y \\ -0.75y & 0.75 - 0.75x - 2ry \end{bmatrix}$$

sehingga analisis kestabilan dari titik ekuilibriumnya yaitu :

a. Analisis Kestabilan pada Titik Ekuilibrium E_1

Untuk menganalisis kestabilan sistem (4.2) pada titik ekuilibrium $(0,0)$ subtitusi nilai titik E_1 yang bersesuaian ke matriks Jacobian sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu

$$(0.75 - \lambda)(0.75 - \lambda) = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = 0.75$$

Karena nilai $\lambda_{1,2} > 0$ maka sistem tidak stabil di titik $(0,0)$.

b. Analisis Kestabilan pada Titik Ekuilibrium E_2

Untuk menganalisis kestabilan sistem (4.2) pada titik ekuilibrium $\left(\frac{0.75}{b}, 0\right)$ substitusi nilai titik E_2 yang bersesuaian ke matriks Jacobian sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu

$$(-0.75 - \lambda)\left(0.75 - \frac{0.5625}{b} - \lambda\right) = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -0.75$$

$$\lambda_2 = 0.75 - \frac{0.5625}{b}$$

Nilai λ_2 bergantung pada parameter b, jika $b = 0.75$ akan didapatkan $\lambda_2 = 0$ sehingga dimungkinkan terjadi bifurkasi.

c. Analisis Kestabilan pada Titik Ekuilibrium E_3

Untuk menganalisis kestabilan sistem (4.2) pada titik ekuilibrium $\left(0, \frac{0.75}{r}\right)$ substitusi nilai titik E_3 yang bersesuaian ke matriks Jacobian sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu

$$\left(0.75 - \frac{0.5625}{r} - \lambda\right)(-0.75 - \lambda) = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = 0.75 - \frac{0.5625}{r}$$
$$\lambda_2 = -1$$

Nilai λ_1 bergantung pada parameter r, jika $r = 0.75$ akan didapatkan $\lambda_1 = 0$ sehingga dimungkinkan terjadi bifurkasi.

d. Analisis Kestabilan pada Titik Ekuilibrium E_4

Untuk menganalisis kestabilan sistem (4.2) pada titik ekuilibrium $\left(\frac{3(4r-3)}{16br-9}, \frac{3(4b-3)}{16br-9}\right)$ substitusi nilai titik E_4 yang bersesuaian ke matriks Jacobian sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu

$$\lambda^2 - \lambda(P+Q) + PQ - (cqx^*y^*) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{(P+Q) \pm \sqrt{(P+Q)^2 - 4\big(PQ - (cqx^*y^*)\big)}}{2}$$

dengan

$x^* = \frac{3(4r-3)}{16br-9}$

$y^* = \frac{3(4b-3)}{16br-9}$

$P = 1 - 2bx^* - y^*$

$Q = 1 - x^* - 2ry^*$

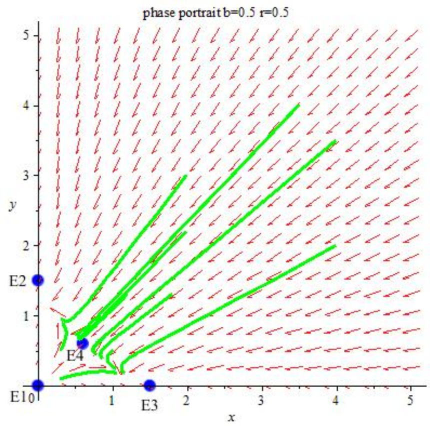
Nilai λ_1 dan λ_2 bergantung ada parameter b dan r, jika $b = 0.75$ dan $r = 0.75$ akan didapatkan $\lambda_{1,2} = 0$ sehingga dimungkinkan terjadi bifurkasi.

1. Kasus $b = r$

Pada kasus ini dipilih $b = 0.5$ dan $r = 0.5$ sehingga sistemnya menjadi :

$$\frac{dx}{dt} = x(0.75 - 0.5x - 0.75y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(0.75 - 0.75x - 0.5y) \quad (4.3)$$

Sehingga terdapat empat titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0), E_2(0,1.5), E_3(1.5,0)$, dan $E_4(0.6,0.6)$. Potret fase sistem (4.3) yaitu sebagai berikut :



Gambar 1 Potret fase $\boldsymbol{b = 0.5, r = 0.5}$

Pada Gambar 1 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal yang berbeda – beda, solusi akan menjauhi $E_1(0,0)$ dan $E_4(0.6,0.6)$, mendekati $E_2(0,1.5)$ dan $E_3(1.5,0)$, sehingga dapat dilihat bahwa titik $E_1(0,0)$ dan $E_4(0.6,0.6)$ tidak stabil, $E_2(0,1.5)$ dan $E_3(1.5,0)$ stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan pula berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Matriks Jacobian dari sistem (4.3) yaitu

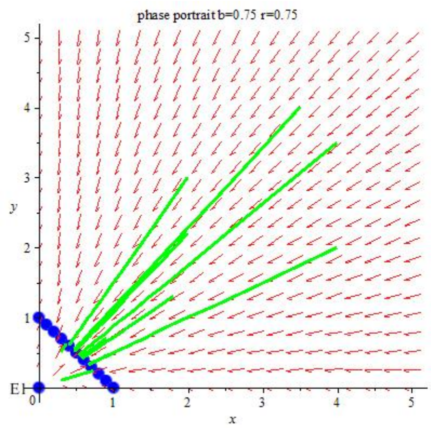
$$\begin{bmatrix} 0.75 - x - 0.75y & -0.75y \\ -0.75y & 0.75 - 0.75x - y \end{bmatrix}$$

sehingga untuk $E_1(0,0)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai positif maka $E_1(0,0)$ merupakan *source*, untuk $E_4(0.6,0.6)$ diperoleh dua nilai eigen yang bernilai real positif dan real negatif maka $E_4(0.6,0.6)$ merupakan *saddle,* untuk $E_2(0,1.5)$ dan $E_3(1.5,0)$ diperoleh masing - masing dua nilai eigen yang bernilai real negatif maka $E_2(0,1.5)$ dan $E_3(1.5,0)$ merupakan *sink.* Dalam kehidupan nyata, interpretasi kondisi ini yakni ketika tingkat kematian populasi jenis I sama dengan tingkat kematian populasi jenis II yaitu sebesar 0.5 maka populasi jenis I akan punah ketika populasi awal berada di daerah atas garis $y = x$ dengan kata lain populasi awal jenis II lebih besar daripada populasi awal jenis I. Sedangkan, populasi jenis II akan punah ketika populasi awal yang berada di daerah bawah garis $y = x$ dengan kata lain populasi awal jenis I lebih besar daripada populasi awal jenis II. Dari Gambar 1 di atas, dapat dilihat bahwa ketika nilai $b = r$ terdapat separatrix (lintasan yang memasuki dan meninggalkan titik *saddle*) garis $y = x$. Garis $y = x$ menjadi separatrix karena sistem persamaan (4.3) akan memiliki bentuk yang sama apabila nilai x dan y ditukar posisi.

Pada kasus kedua dipilih $b = 0.75$ dan $r = 0.75$, sehingga sistemnya menjadi :

$$\frac{dx}{dt} = x(0.75 - 0.75x - 0.75y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(0.75 - 0.75x - 0.75y) \qquad (4.4)$$

Sehingga terdapat tak hingga banyak titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0)$ dan titik di sepanjang garis $x = 1 - y$. Potret fase dari sistem (4.4) yaitu sebagai berikut :



Gambar 2 Potret fase $b = 0.75, r = 0.75$

Pada Gambar 2 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal yang berada di bawah garis $x = 1 - y$ akan menjauhi $E_1(0,0)$ dan nilai awal yang berada di atas garis $x = 1 - y$ akan mendekati titik ekuilibrium yang terletak sepanjang garis $x = 1 - y$, sehingga dapat dilihat bahwa titik $E_1(0,0)$ tidak stabil dan titik ekuilibrium yang terletak di sepanjang garis $x = 1 - y$ stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan pula berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Matriks Jacobian dari sistem (4.4) yaitu

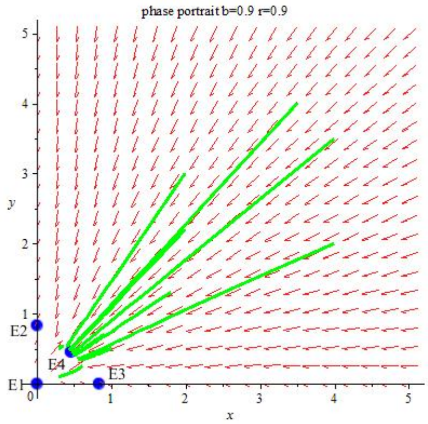
$$\begin{bmatrix} 0.75 - 1.5x - 0.75y & -0.75y \\ -0.75y & 0.75 - 0.75x - 1.5y \end{bmatrix}$$

Sehingga untuk $E_1(0,0)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real positif maka $E_1(0,0)$ merupakan *source*. Interpretasi pada keadaan riil yaitu ketika tingkat kematian populasi jenis I sebesar 0.75 dan ketika tingkat kematian populasi jenis II sebesar 0.75 dengan kata lain tingkat kematian populasi jenis I sama dengan tingkat kematian populasi jenis II maka populasi populasi jenis I dan populasi jenis II akan hidup bersama. Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa ketika populasi jenis I sebesar 0 atau populasi jenis I punah maka populasi jenis II sebesar 1, ketika jumlah populasi jenis I sebesar 0.1 maka jumlah populasi jenis II sebesar 0.9, artinya jika terdapat 100 populasi maka terdapat 10 populasi jenis I dan 90 populasi jenis II dengan kata lain populasi jenis I dan populasi jenis II hidup bersama. Ketika jumlah populasi jenis I sebesar 0.2 maka jumlah populasi jenis II sebesar 0.8, artinya jika terdapat 100 populasi maka terdapat 20 populasi jenis I dan 80 populasi jenis II dengan kata lain populasi jenis I dan populasi jenis II hidup bersama, dan seterusnya dengan perbandingan populasi jenis I (x) dan populasi jenis II (y) yaitu $x = 1 - y$. Dari Gambar 5 dapat dilihat juga bahwa ketika nilai awal yang berada pada $y = x$ dengan kata lain nilai awal populasi jenis I sama dengan nilai awal populasi jenis II, maka trayektori akan selalu menuju ke titik ekuilibrium $(0.5,0.5)$, selanjutnya ketika jumlah populasi jenis I sebesar 2 kali jumlah populasi jenis II, maka trayektori akan selalu menuju ke titik ekuilibrium $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Pada kasus selanjutnya dipilih $b = 0.9$ dan $r = 0.9$, sehingga sistemnya menjadi :

$$\frac{dx}{dt} = x(0.75 - 0.9x - 0.75y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(0.75 - 0.75x - 0.9y) \qquad (4.5)$$

Sehingga terdapat empat titik ekuilibrium yaitu $E_1(0,0), E_2(0,0.83), E_3(0.83,0)$, dan $E_4(0.45,0.45)$. Potret fase dari sistem (4.5) yaitu sebagai berikut :



Gambar 3 Potret fase $b = 0.9, r = 0.9$

Pada Gambar 3 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal yang berbeda – beda, solusi akan menjauhi $E_1(0{,}0), E_2(0{,}0.83)$ dan $E_3(0.83{,}0)$, mendekati $E_4(0.45{,}0.45)$, sehingga dapat dilihat bahwa titik $E_1(0{,}0), E_2(0{,}0.83)$ dan $E_3(0.83{,}0)$ tidak stabil, $E_4(0.45{,}0.45)$ stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan pula berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Matriks Jacobian dari sistem (4.5) yaitu

$$\begin{bmatrix} 0.75 - 1.8x - 0.75y & -0.75y \\ -0.75y & 0.75 - 0.75x - 1.8y \end{bmatrix}$$

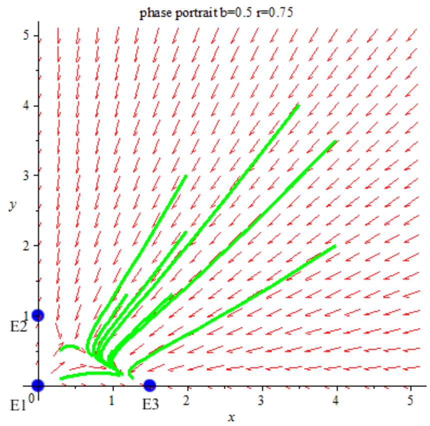
Sehingga untuk $E_1(0{,}0)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real positif maka $E_1(0{,}0)$ merupakan *source*, untuk $E_2(0{,}0.83)$ dan $E_3(0.83{,}0)$ diperoleh masing – masing dua nilai eigen yang bernilai real positif dan real negatif maka $E_2(0{,}0.83)$ dan $E_3(0.83{,}0)$ merupakan *saddle,* untuk $E_4(0.45{,}0.45)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real negatif maka $E_4(0.45{,}0.45)$ merupakan *sink.* Dalam kehidupan nyata, hal ini menunjukkan bahwa ketika tingkat kematian populasi jenis I sebesar 0.9 dan ketika tingkat kematian populasi jenis II sebesar 0.9 dengan kata lain tingkat kematian populasi jenis I sama dengan tingkat kematian populasi jenis II maka populasi jenis I dan populasi jenis II akan hidup bersama. Dari Gambar 3 di atas, dapat dilihat bahwa simetri terhadap garis $y = x$, karena sistem persamaan (4.5) akan memiliki nilai yang sama apabila nilai x dan y ditukar, sehingga apabila nilai $b = r$, maka terdapat garis separatrix (lintasan yang memasuki dan meninggalkan titik *saddle*) yaitu garis $y = x$.

2. Kasus $b < r$

Pada kasus ini dipilih $b = 0.5$ dan $r = 0.75$ sehingga sistemnya menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(0.75 - 0.5x - 0.75y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(0.75 - 0.75x - 0.75y) \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Sehingga terdapat tiga titik ekuilibrium yaitu $E_1(0{,}0), E_2(0{,}1)$, dan $E_3(1.5{,}0)$. Potret fase sistem (4.6) yaitu sebagai berikut :



Gambar 4 Potret fase $b = 0.5, r = 0.75$

Pada Gambar 4 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal yang berbeda – beda, solusi akan menjauhi $E_1(0{,}0)$ dan $E_2(0{,}1)$, mendekati $E_3(1.5{,}0)$, sehingga dapat dilihat bahwa titik $E_1(0{,}0)$ dan $E_2(0{,}1)$ tidak stabil, $E_3(1.5{,}0)$ stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan pula berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Matriks Jacobian dari sistem (4.6) yaitu

$$\begin{bmatrix} 0.75 - x - 0.75y & -0.75y \\ -0.75y & 0.75 - 0.75x - 1.5y \end{bmatrix}$$

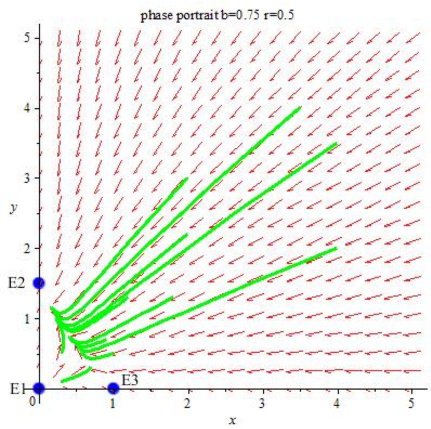
Sehingga untuk $E_1(0{,}0)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real positif maka $E_1(0{,}0)$ merupakan *source*, untuk $E_2(0{,}1)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real positif dan yang lain real negatif maka $E_2(0{,}1)$ merupakan *saddle.* Untuk $E_3(1.5{,}0)$ diperoleh dua nilai eigen yang keduanya bernilai real negatif maka $E_3(1.5{,}0)$ merupakan *sink.* Dalam kehidupan nyata, interpretasi kondisi ini yakni ketika tingkat kematian populasi jenis I sebesar 0.5 dan ketika tingkat kematian populasi jenis II sebesar 0.75 dengan kata lain tingkat kematian populasi jenis II lebih besar dibandingkan tingkat kematian populasi jenis I maka populasi jenis II akan punah.

3. Kasus *b* > *r*

Pada kasus ini dipilih $b = 0.75$ dan $r = 0.5$ sehingga sistemnya mejadi :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(0.75 - 0.75x - 0.75y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(0.75 - 0.75x - 0.5y) \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Sehingga terdapat tiga titik ekuilibrium yaitu $E_1(0{,}0), E_2(0{,}1.5)$, dan $E_3(1{,}0)$. Potret fase sistem (4.7) yaitu sebagai berikut :



Gambar 5 Potret fase $b = 0.75, r = 0.5$

Pada Gambar 5 terlihat bahwa ketika diambil nilai awal yang berbeda – beda, solusi akan menjauhi $E_1(0{,}0)$ dan $E_2(0{,}1.5)$ serta mendekati $E_3(1{,}0)$, sehingga dapat dilihat bahwa titik $E_1(0{,}0)$ dan $E_3(1{,}0)$ tidak stabil, $E_2(0{,}1.5)$ stabil. Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan pula berdasarkan nilai eigen dari hasil linearisasi di sekitar titik ekuilibrium. Matriks Jacobian dari sistem (4.7) yaitu

$$\begin{bmatrix} 0.75 - 1.5x - 0.75y & -0.75y \\ -0.75y & 0.75 - 0.75x - y \end{bmatrix}$$

Sehingga untuk $E_1(0{,}0)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real positif maka $E_1(0{,}0)$ merupakan *source*, untuk $E_3(1{,}0)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real positif dan real negatif maka $E_3(1{,}0)$ merupakan *saddle,* untuk $E_2(0{,}1.5)$ diperoleh dua nilai eigen bernilai real negatif maka $E_2(0{,}1.5)$ merupakan *sink.* Dalam kehidupan nyata, interpretasi kondisi ini yakni ketika tingkat kematian populasi jenis I sebesar 0.75 dan ketika tingkat kematian populasi jenis II sebesar 0.5 dengan kata lain tingkat kematian populasi jenis I lebih besar dibandingkan tingkat kematian populasi jenis II maka populasi jenis I akan punah.

Berdasarkan potret fase tersebut di atas, kemudian disusun tabel titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium sistem (4.2) sebagai berikut :

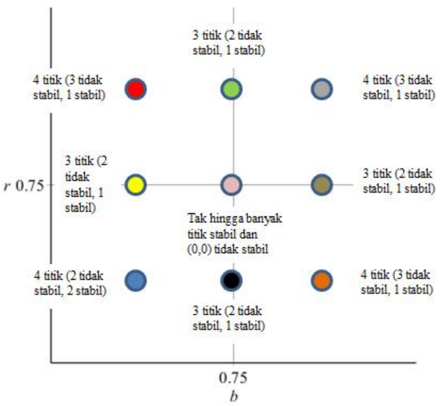
Tabel 2 Titik Ekuilibrium Sistem (4.2) dan Kestabilannya

	$0 < r < 0.7$	$r = 0.75$	$r > 0.75$
$0 < b < 0.7$	Terdapat empat titik ekuilibrium dengan dua titik stabil dan dua titik lainnya tidak stabil	Terdapat tiga titik ekuilibrium dengan satu titik stabil dan dua titik lainnya tidak stabil	Terdapat empat titik ekuilibrium dengan satu titik stabil dan tiga titik lainnya tidak stabil
$b = 0.75$	Terdapat tiga titik ekuilibrium dengan satu titik stabil dan dua titik lainnya tidak stabil	Terdapat tak hingga banyak titik ekuilibrium yaitu sepanjang garis $x = 1 - y$ stabil dan titik $(0{,}0)$ tidak stabil	Terdapat tiga titik ekuilibrium dengan satu titik stabil dan dua titik lainnya tidak stabil
$b > 0.75$	Terdapat empat titik ekuilibrium	Terdapat tiga titik ekuilibrium	Terdapat empat titik

	dengan satu titik stabil dan tiga titik lainnya tidak stabil	m dengan satu titik stabil dan dua titik lainnya tidak stabil	ekuilibrium dengan satu titik stabil dan tiga titik lainnya tidak stabil

Dari Tabel 3 dapat disimpulkan bahwa apabila tingkat kematian populasi jenis I (b) kurang dari tingkat kematian populasi jenis II (r) dengan kata lain $b < r$ maka populasi jenis II akan punah dan terdapat tiga titik ekuilibrium, apabila $b = r$ maka terdapat dua kondisi yaitu : 1) Populasi jenis I dan populasi jenis II hidup bersama dengan empat titik ekuilibrium atau tak hingga banyak titik ekuilibrium, 2) Populasi jenis I akan punah ketika dipilih nilai awal yang berada di daerah atas garis $y = x$ dengan kata lain populasi awal jenis II lebih besar daripada populasi awal jenis I dan terdapat empat titik ekuilibrium sedangkan populasi jenis II akan punah ketika dipilih nilai awal yang berada di daerah bawah garis $y = x$ dengan kata lain populasi awal jenis I lebih besar daripada populasi awal jenis II dan terdapat empat titik ekuilibrium, apabila $b > r$ maka populasi jenis I akan punah dan terdapat tiga titik ekuilibrium.

Dari Tabel 3 dapat digambarkan diagram bifurkasinya yaitu seperti gambar berikut ini :



Gambar 2 Diagram bifurkasi sistem (4.2)

Dari Gambar 10 tersebut dapat diketahui bahwa bifurkasi yang terjadi pada sistem (4.2) dapat dilihat dari adanya perubahan banyaknya titik ekuilibrium dan perubahan titik ekuilibriumnya saja, namun tidak dapat ditentukan nama bifurkasinya karena perilaku sistem (4.2) berbeda dengan perilaku sistem yang mengalami bifurkasi secara umum.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis bifurkasi pada model matematika kompetisi antar dua populasi diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Diperoleh model matematika kompetisi antar dua populasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - bx - cy) \\ \frac{dy}{dt} &= y(p - qx - ry) \end{aligned} \qquad (5.1)$$

2. Sistem (5.1) apabila dipilih nilai $a = 0.75, c = 0.75, p = 0.75,\ q = 0.75$ dan $b,\ r$ sebagai parameter yang diubah – ubah, memiliki empat titik ekuilibrium yaitu :

$$E_1 = (0{,}0)$$
$$E_2 = \left(\frac{0.75}{b}, 0\right)$$
$$E_3 = \left(0, \frac{0.75}{r}\right)$$
$$E_4 = \left(\frac{3(4r-3)}{16br-9}, \frac{3(4b-3)}{16br-9}\right)$$

Apabila tingkat kematian populasi jenis I (b) kurang dari tingkat kematian populasi jenis II (r) dengan kata lain $b < r$ maka populasi jenis II akan punah dan terdapat tiga titik ekuilibrium, apabila $b = r$ maka terdapat dua kondisi yaitu : 1) Populasi jenis I dan populasi jenis II hidup bersama dengan empat titik ekuilibrium atau tak hingga banyak titik ekuilibrium, 2) Populasi jenis I akan punah ketika dipilih nilai awal yang berada di daerah atas garis $y = x$ dengan kata lain populasi awal jenis II lebih besar daripada populasi awal jenis I dan terdapat empat titik ekuilibrium sedangkan populasi jenis II akan punah ketika dipilih nilai awal yang berada di daerah bawah garis $y = x$ dengan kata lain populasi awal jenis I lebih besar daripada populasi awal jenis II dan terdapat empat titik ekuilibrium, apabila $b > r$ maka populasi jenis I akan punah dan terdapat tiga titik ekuilibrium.

Bifurkasi yang terjadi pada sistem (5.1) dapat dilihat dari adanya perubahan banyaknya titik ekuilibrium dan perubahan titik ekuilibriumnya saja, namun tidak dapat ditentukan nama bifurkasinya karena perilaku sistem (5.1) berbeda dengan perilaku sistem yang mengalami bifurkasi secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. (1988). *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kelima. Erlangga : Jakarta.

Clarke, G. L. (1954). *Elements of Ecology.* Chapman & Hall : London.

Hale, J & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York : Springer.

Kapur J. N. (2000). *Mathematical Models in Biology and Medicine.* Affiliated East-West Press Private Limited: New Delhi.

Kuznetsov. (1998). *Element of Applied Bifurcation Theory.* 2nd Edition. Applied Mathematicak Sciences. Vol 112. New York : Springer – Verlag.

Listyana, Lia. (2016). *Analisis Bifurkasi pada Model Matematika Predator – Prey dengan Dua Predator*. Skripsi. Universitas Negeri Yogyakarta.

Lynch, Stephen. (2010). *Dynamical Systems with Applications using Maple*. Second Edition. Berlin : Birkhauser.

Monica, Ritanica, dkk. (2014). *Kestabilan Populasi Model Lotka – Volterra Tiga Spesies dengan Titik Keseimbangan*. JOM FMIPA Volume 1 No. 2 Oktober 2014.

Nila, E, dkk. (2013). *Analisis Dinamika Model Kompetisi Dua Populasi yang Hidup Bersama di Titik Kesetimbangan Tidak Terdefinisi*. Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster) Volume 02, No. 3, hal 197 – 204.

Olsder, G. J. & Woude, J. W. van der. (2004). *Mathematical Systems Theory*. Netherland : VVSD.

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition. Springer – Verlag : New York.

Ross, Sepley L. (1984). *Differential Equations*. 3rd. New York : Springer.

Rosyid, Fathurohmawan. (2012). *Analisis Kestabilan dan Limit Cycle pada Model Predator – Prey Tipe Gause*. Skripsi. ADLN Perpustakaan Universitas Airlangga.

Seydel, Rudiger. (2010). *Practical Bifurcation and Stability Analysis.* 3rd Edition. New York : Springer.

Widowati & Sutimin. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang : FMIPA UNDIP.

Wiggins, Stephen. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. 2nd. New York : Springer