ESTIMASI CONDITIONAL VALUE AT RISK (CVaR) PADA PORTOFOLIO MENGGUNAKAN COPULA BERSYARAT

CONDITIONAL VALUE AT RISK (CVaR) OF PORTFOLIO USING CONDITIONAL COPULA

Oleh: Intan Lisnawati[1], Retno Subekti[2]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
intan0871fmipa@student.uny.ac.id[1], retnosubekti@uny.ac.id[2]

Abstrak

Risiko dapat diartikan sebagai tingkat kerugian yang dapat dialami investor dalam berinvestasi. *Conditional Value at Risk* (CVaR) merupakan salah satu metode untuk mengestimasi risiko. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui prosedur estimasi CVaR pada portofolio menggunakan copula bersyarat. Metode yang digunakan untuk mengestimasi CVaR dalam penelitian ini adalah menggunakan fungsi distribusi copula bersyarat Clayton. Copula bersyarat adalah copula yang menerapkan koefisien dependensi ekor berdasarkan karakteristik dari masing-masing copula bersyarat yang digunakan. Salah satu copula bersyarat adalah copula Clayton dari kelas Archimedian. Dalam membentuk fungsi distribusi marginal dari saham digunakan model ARCH/GARCH sebagai metode yang dapat memodelkan data dengan variansi yang tidak homogen. Hasil penelitian adalah prosedur estimasi CVaR pada portofolio menggunakan copula bersyarat yaitu: perhitungan *return* saham, identifikasi karakteristik data, pemodelan distribusi marginal dengan GARCH, pembentukan fungsi distribusi bersama dengan copula bersyarat Clayton, dan perhitungan CVaR.

Kata kunci: Portofolio, Copula Bersyarat, CVaR

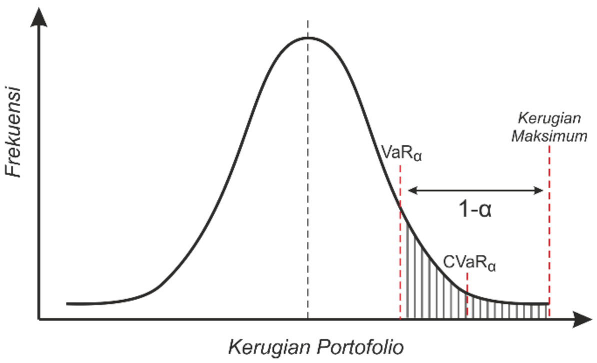
Abstract

Risk can be interpreted as the level of loss that can be experienced by investors in investing. CVaR is one method to estimate risk. Conditional copula is a copula that implements tail dependent coefficients based on the characteristics of each conditional copula used. One of the conditional copulas is Clayton's copula from the Archimedian class. This study aims to find out the CVaR estimation procedure on the portfolio using conditional copula. The method used to estimate CVaR in this study is to use Clayton's conditional copula distribution function. The stock marginal distribution is modeled by ARCH / GARCH because stock data has a non-homogeneous variance. The result of this research is CVaR estimation procedure on portfolio using conditional copula, those are: stock return calculation, identification of data characteristic, modeling of marginal distribution with GARCH, establishment of distribution function along with Clayton conditional copula, and CVaR calculation.

Keywords: Portfolio, Conditional Copula, CVaR

PENDAHULUAN

Dalam berinvestasi hal yang sering menjadi pusat perhatian investor dalam berinvestasi adalah risiko, yaitu kemungkinan akan terjadinya hasil yang tidak diinginkan dan dapat menimbulkan kerugian. Estimasi nilai risiko dilakukan sebagai salah satu langkah persiapan investor untuk melakukan investasi pada suatu saham atau dalam penyusunan portofolio. Dengan mengetahui risiko yang mungkin dialami, maka investor dapat mengetahui gambaran peluang untuk memperoleh keuntungan karena semakin besar risiko yang mungkin dialami, maka semakin besar pula keuntungan yang mungkin diperoleh. Oleh karena itu diperlukan metode untuk mengestimasi risiko kerugian dalam berinvestasi. *Value at Risk* (VaR) merupakan metode estimasi pengukuran risiko kerugian maksimum yang mungkin terjadi dalam suatu portofolio pada tingkat kepercayaan tertentu (Best, 1998).



Gambar 1. Visualisasi Perbandingan Perhitungan VaR dan CVaR

Salah satu kelemahan metode VaR yaitu mengabaikan nilai kerugian yang melebihi perhitungan VaR pada tingkat risiko $(1-\alpha)$ seperti yang ditunjukkan Gambar 1, sehingga hasil estimasi VaR kurang akurat. Kekurangan metode VaR tersebut dapat diatasi menggunakan metode CVaR yang mempertimbangkan nilai kerugian yang melebihi nilai VaR (Yang, 2014). Sehingga didapatkan hasil estimasi risiko yang lebih akurat.

Pada tahun 1959, seorang matematikawan bernama Abe Sklar pertama kali mengenalkan sebuah konsep yang menggambarkan fungsi yang menggabungkan berbagai bentuk fungsi distribusi univariat untuk membentuk fungsi distribusi multivariat yang disebut sebagai konsep copula melalui Teorema Sklar (Nelsen, 1999). Teori *copula* tersebut merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk memodelkan distribusi bersama dan tidak mengharuskan asumsi normalitas dari data sehingga fleksibel untuk diterapkan pada berbagai data termasuk pada data *return* saham.

Penelitian terkait estimasi CVaR pada portofolio telah dilakukan oleh Sumariska & Subekti (2016) dengan menggunakan model Black-Litterman. Pada model Black-Litterman data yang digunakan harus berdistribusi normal, sedangkan pada fungsi copula tidak terdapat keharusan data berdistribusi normal. Berdasarkan keunggulan-keunggulan yang dimiliki CVaR dan copula, maka penulis tertarik untuk menerapkan fungsi copula dalam mengestimasi CVaR menggunakan data *return* harian saham pada masa lampau berbasis copula bersyarat Clayton yang memiliki satu parameter sehingga cenderung lebih mudah dikonstruksi. Sebelum data saham dimodelkan menggunakan copula Clayton terlebih dahulu distribusi marginal saham dimodelkan menggunakan GARCH berdasarkan residualnya. Pemodelan GARCH ini bertujuan untuk menghilangkan efek heteroskedastisitas yang biasanya dimiliki oleh data saham (Iriani, Akbar, & Haryono, 2013). Pada tahap akhir dilakukan uji *backtesting* sebagai langkah validasi estimasi risiko dari model yang telah diperoleh.

KAJIAN PUSTAKA

A. Portofolio

Portofolio didefinisikan sebagai kumpulan dari beberapa sekuritas dalam suatu unit yang dipegang atau dibuat oleh seorang investor, perusahaan investasi, atau institusi keuangan (Hartono, 2014(a), p. 6). Pembentukan portofolio bertujuan untuk melakukan diversifikasi pada investasi sehingga mampu memaksimalkan keuntungan dengan risiko yang minimal.

B. *Return*

Return merupakan hasil yang diperoleh dari investasi. *Return* suatu sekuritas dihitung menggunakan persamaan:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \qquad (1)$$

dengan:

P_t = harga sekuritas pada periode ke-*t*

P_{t-1} = harga sekuritas pada periode ke-(*t-1)*

C. Copula

Teori copula pada distribusi multivariat dijelaskan dalam teorema yang dikemukakan oleh Sklar, yang menyatakan bahwa copula dapat digunakan untuk menggabungkan sekaligus mendekomposisikan suatu distribusi multivariat dan sebuah fungsi copula.

Teorema Sklar. (Cherubini, Luciano, & Vecchiato, 2004)

Misalkan F merupakan fungsi distribusi bersama d-dimensi dengan distribusi marginal $F_1, F_2, \dots, F_d$ *dengan masing-masing merupakan fungsi distribusi marginal dari* $X_1, X_2, \dots, X_d$ *maka akan terdapat sebuah copula C sedemikian sehingga untuk* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) = C(u_1, u_2, \dots, u_d) \quad (2)$$

D. *Conditional Value at Risk* (CVaR)

CVaR merupakan metode pengukuran risiko yang memiliki sifat *sub-additive* yaitu CVaR pada suatu portofolio selalu kurang dari atau sama dengan jumlah dari masing-masing CVaR pada komponen portofolio tersebut. Selain itu, sifat *convex* yang dimiliki CVaR mendukung untuk digunakan dalam teknik optimalisasi (Rockafellar & Uryasev, 2000). Jika X^α adalah variabel acak yang memiliki fungsi distribusi kumulatif $F_X^{(1-\alpha)}$, maka CVaR didefinisikan sebagai:

$$\text{CVaR}_{(1-\alpha)}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_{VaR_{(1-\alpha)}(X)}^{\infty} z f_X(z)\,dz \quad (3)$$

dengan:

z = nilai kerugian

$f_X(z)$ = fungsi densitas probabilitas dari kerugian

E. Uji Normalitas

Uji normalitas perlu dilakukan untuk mengantisipasi terjadinya ketidakstabilan harga yang dikhawatirkan mengalami penurunan harga sehingga dapat merugikan investor. Uji normalitas dapat dilakukan dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* (KS) sebagai berikut (Bohm & Zech, 2010):

H_0: data *return* saham diasumsikan berdistribusi normal

H_1: data *return* saham tidak dapat diasumsikan berdistribusi normal

Tingkat signifikansi: α

Statistik uji:

$$D = \max|F_s(X) - F_t(X)| \quad (4)$$

dengan:

$F_s(X)$ = distribusi kumulatif data sampel

$F_t(X)$ = distribusi kumulatif data distribusi normal

Kriteria: H_0 ditolak jika *p-value* KS < *α.*

F. Uji Stasioneritas

Salah satu syarat dalam estimasi data runtun waktu adalah stasioneritas. Suatu data disebut stasioner apabila data tersebut memiliki nilai rata-rata dan variansi yang relatif konstan sepanjang waktu. Data yang tidak stasioner dapat mengakibatkan nilai estimasi yang dihasilkan menjadi tidak valid (Rusdi, 2011). Uji stasioneritas dapat dilakukan menggunakan uji *Dickey-Fuller*. Dickey dan Fuller (1979) memandang tiga model persamaan regresi yang bisa digunakan untuk menguji kehadiran akar unit, yaitu:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$y_t = a_0 + a_1 y_t - 1 + \varepsilon_t \quad (6)$$

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t \quad (7)$$

Ketiga model di atas dapat dilakukan reparameterisasi sebagai berikut:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8)$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t \quad (10)$$

dengan $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ dan $\gamma = a_1 - 1$. Parameter yang menjadi perhatian pada ketiga model regresi *Dickey-Fuller* kini adalah γ. Jika $\gamma = 0$, yang maka $a_1 = 1$, yang artinya y_t mempunyai akar unit atau $y_t$tidak stasioner.

$H_0: \gamma = 0$

$H_1: \gamma < 0$

Statistik uji:

$$\tau = \frac{\hat{\gamma} - \gamma}{SE(\hat{\gamma})} \quad (11)$$

dengan:

γ = koefisien pada regresi

$\hat{\gamma}$ = penaksir kuadrat terkecil dari γ

$SE(\hat{\gamma})$ = kesalahan standar pada $(\hat{\gamma})$

Jika statistik τ kurang dari nilai kritis *Dickey-Fuller* pada taraf signifikansi α maka H_0 ditolak dan disimpulkan bahwa data telah stasioner.

G. *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Pemodelan data finansial yang berupa data runtun waktu dapat dibuat pemodelan runtun waktu. Beberapa model runtun waktu yaitu *Autoregressive* (AR), *Moving Average* (MA), dan *Autoregressive Moving Average* (ARMA) dengan cara kerja memodelkan rata-rata dari runtun waktu dengan asumsi bahwa data sudah stasioner dan variansi *error* tetap antar waktu (Wei, 1990). Namun penggunaan model tersebut tidak tepat diterapkan pada data finansial dikarenakan indeks harga saham, suku bunga, dan sebagainya memiliki keragaman yang tidak konstan sehingga variansi *error* berubah setiap waktu atau terjadi heteroskedastisitas.

Model runtun waktu yang non stasioner dapat dikatakan sebagai proses ARIMA (p,d,q), dengan p adalah ordo AR, d adalah banyaknya diferensiasi pada proses sehingga menjadi proses stasioner, dan q adalah ordo MA (Box & Jenkins, 1976). Cryer (1986) merumuskan beberapa model umum ARIMA sebagai berikut:

i. Model ARIMA $(p,0,0)$ atau AR (p)
$$Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \cdots + \emptyset_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (12)$$
ii. Model ARIMA $(0,0,q)$ atau MA (q)
$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (13)$$
iii. Model ARIMA $(p,0,q)$ atau ARMA (p,q)
$$Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \cdots + \emptyset_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (14)$$
iv. Model ARIMA (p,d,q)
$$W_t = \nabla^d Y_t \quad (15)$$
$$W_t = \emptyset_1 W_{t-1} + \emptyset_2 W_{t-2} + \cdots + \emptyset_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (16)$$

dengan:
$\emptyset$ = parameter *autoregressive*
θ = parameter *moving average*
p = derajat *autoregressive*
d = derajat pembedaan (*difference*)
q = derajat *moving average*
ε_t = residual pada waktu ke-t

H. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH)

Data saham memiliki kecenderungan variansi yang tidak homogen (heteroskedastisitas). Pada tahun 1982, Engle mengenalkan sebuah metode yang dapat memenuhi karakteristik-karakteristik yang dimiliki oleh data runtun waktu finansial dengan memungkinankan adanya heteroskedastisitas, model tersebut adalah *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (ARCH). Bentuk umum model ARCH (p) yaitu sebagai berikut:
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (17)$$
dengan
$\alpha_0 > 0,\ p > 0,\ \alpha_i \geq 0$, untuk $i = 1, \dots, p$
α_0 = konstanta
α_i = koefisien α ke-i
ε_{t-i}^2 = kuadrat dari residual pada waku ke-*(t-i)*
p = banyaknya periode waktu sebelumnya yang mempengaruhi data sekarang

Kemudian Bollerslev (1986) mengembangkan model ARCH (p) menjadi model GARCH (p,q). Pada model GARCH, variansi residual tidak hanya dipengaruhi oleh residual kuadrat masa lalu, namun variansi masa lalu juga berpengaruh. Model GARCH (p,q) memiliki persamaan umum sebagai berikut:
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (18)$$
dengan:
$p > 0, q \geq 0$
$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$, untuk $i = 1, \dots, p$
$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$
α_0 = konstanta
α_i = koefisien α ke-i
β_j = koefisien β ke-j
σ_t^2 = variansi pada waktu ke-t
ε_{t-i}^2 = kuadrat dari residual pada waku ke-*(t-i)*
σ_{t-j}^2 = variansi pada waktu ke-*(t-j)*

Menurut Tsay (2001) orde model GARCH dapat ditentukan berdasarkan grafik ACF dari residual kuadrat. Jika $q = 0$, maka persamaan tersebut akan menjadi model ARCH (p).

I. Metode *Inference Function for Margin* (IFM)

Metode IFM diusulkan oleh Joe & Xu (1996) yang dikenal dengan metode dua langkah dengan ide masing-masing langkahnya mengikuti pendekatan metode maksimum *likelihood*. Memperhatikan model berbasis copula untuk vektor acak $\boldsymbol{X}$ dengan fungsi distribusi kumulatif
$$F(x; \boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_d, \boldsymbol{\theta}) = C(F_1(x_1; \boldsymbol{\vartheta}_1), \dots, F_d(x_d; \boldsymbol{\vartheta}_d); \boldsymbol{\theta}) \quad (19)$$
dengan $F_1, \dots, F_d$ adalah fungsi distribusi kumulatif univariat dengan parameter vektor $\boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_d$ dan C adalah keluarga copula dengan parameter vektor $\boldsymbol{\theta}$.

Untuk sampel ukuran n dengan vektor acak yang diamati $x_1, \dots, x_n$ dapat melihat fungsi log-*likelihood* d untuk marginal univariat
$$L_i(\boldsymbol{\vartheta}_i) = \sum_{i=1}^{n} \log f_i(x_{hi}; \boldsymbol{\vartheta}_i), \quad i = 1, \dots, d$$
dan fungsi log-*likelihood* untuk distribusi bersama
$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_d) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i; \boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_d, \boldsymbol{\theta})$$

Langkah-langkah metode IFM terdiri dari proses optimisasi terpisah dari *likelihood* univariat dilanjutkan dengan optimalisasi *likelihood* multivariat sebagai fungsi dari vektor parameter dependensi sebagai berikut.

a. Log-*likelihood* L_i dari d univariat margin secara terpisah dimaksimalkan untuk mendapatkan estimasi $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_d$.
b. Fungsi $L(\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_d)$ dimaksimalkan terhadap $\boldsymbol{\theta}$ untuk mendapatkan $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$.

Sehingga dalam kondisi teratur $(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_d, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ adalah solusi dari

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_1}, \dots, \frac{\partial L_d}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_d}, \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) = 0 \qquad (20)$$

J. Metode Newton Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan perhitungan yang iteratif, sehingga akan lebih mudah jika dikerjakan dengan bantuan program komputer.Metode Newton-Rapshon menurut Canale & Chapra (1998) didasarkan pada deret Taylor sebagai berikut:

$$f(\theta_{i+1}) = f(\theta_i) + f'(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) + \frac{f''(\theta_i)}{2!}(\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + \dots + \frac{f^n(\theta_i)}{n!}(\theta_{i+1} - \theta_i)^n \qquad (21)$$

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berikut akan dipaparkan mengenai prosedur estimasi CVaR pada portofolio menggunakan copula bersyarat.

1. Copula Bersyarat

Copula bersyarat adalah copula yang menerapkan koefisien dari dependensi ekor berdasarkan karakteristik dari masing-masing copula bersyarat yang digunakan. Copula bersyarat diantaranya yaitu copula Clayton dan Gumbel yang berasal dari kelas Archimedian serta copula *Student-t* dari kelas *Elliptical*. Dalam penelitian ini diterapkan copula Clayton yang mana copula tersebut memiliki satu parameter sehingga cenderung lebih mudah dikonstruksi. Fungsi distribusi copula Clayton yaitu

$$C^{clay}(u_1, u_2; \theta) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \qquad (22)$$

dengan θ adalah parameter copula Clayton.

Fungsi densitas copula Clayton diperoleh dengan menderivatifkan persamaan (16) terhadap u_1 dan u_2.

$$c^{clay}(u_1, u_2) = (1 + \theta)(u_1 u_2)^{-(1+\theta)}\left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)} \qquad (23)$$

Koefisien dependensi copula Clayton pada ekor atas (λ_U) yaitu 0 dan pada ekor bawah (λ_L) yaitu $2^{-\frac{1}{\theta}}$.

2. Pemodelan ARIMA

Proses pembentukan model ARIMA adalah membuat plot fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial, pembentukan model, penaksiran dan uji signifikansi parameter, uji kesesuaian model dengan uji *white noise*, dan pemilihan model terbaik.

Wei (1990) menjelaskan bahwa koefisien fungsi autokorelasi ρ_k dapat diduga dengan:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\left(\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})\right)^2} \qquad (24)$$

dengan:

k = 0, 1, 2, ..., $k < n$
$\hat{\rho}_k$ = koefisien autokorelasi pada lag ke-k
Z_t = nilai pengamatan pada waktu ke-t
$\bar{Z}$ = rata-rata keseluruhan

Penduga koefisien fungsi autokorelasi parsial dirumuskan sebagai berikut (Wei, 1990):

$$\hat{\emptyset}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\emptyset}_{k-1,j}\hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\emptyset}_{k-1,j}\hat{\rho}_j} \qquad (25)$$

dengan:

$\hat{\emptyset}_{kj}$ = $\hat{\emptyset}_{k-1,j} - \hat{\emptyset}_{kk}\hat{\emptyset}_{k-1,k-j}$; $j = 1, 2, .., k-1$
$\hat{\emptyset}_{kk}$ = koefisien autokorelasi parsial pada lag k
$\hat{\rho}_k$ = koefisien autokorelasi pada lag k
$\hat{\rho}_j$ = koefisien autokorelasi pada lag j
$\hat{\rho}_{k-j}$ = koefisien autokorelasi pada lag $k - j$

3. Uji *White Noise*

Wei (1990) menyatakan bahwa sebuah proses $\{a_t\}$ merupakan *white noise* apabila merupakan variabel acak berurutan yang tidak saling berkorelasi dari distribusi tertentu dengan rata-rata konstan $E\{a_t\} = \mu_a$ yang biasanya diasumsikan 0, variansi konstan $Var(a_t) = \sigma_a^2$ dan $\gamma_k = cov(a_t, a_{t+k}) = 0$ untuk semua $k \neq 0$. Dengan demikian, proses *white noise* $\{a_t\}$ stasioner dengan fungsi autokovariansi

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

fungsi autokorelasi

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

dan fungsi autokorelasi parsial

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Setelah nilai dugaan dan uji signifikansi parameter ARIMA diperoleh, maka perlu dilakukan pemeriksaan apakah residual yang dihasilkan bersifat *white noise* atau tidak menggunakan uji Ljung-Box (Q) yang dihitung dengan nilai autokorelasi ρ_k.

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$ (residual *white noise*)

H_1 : paling sedikit terdapat satu $\rho_k \neq 0$ untuk $k = 1, 2, \ldots, K$ (residual tidak *white noise*)

Statistik uji:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \quad (26)$$

dengan:

$\hat{\rho}_k^2$ = sampel autokorelasi dari residual pada lag ke-k

K = banyaknya lag yang diuji

n = banyaknya residual

Keputusan terhadap hipotesis autokorelasi sisaan didasarkan apabila nilai $Q \leq X^2_{\alpha;K-p-q}$ pada taraf nyata α atau *p-value* dari statistik uji Q lebih besar dari nilai α, maka terima H_0 yang artinya residual *white noise*, dengan p adalah orde PACF dan q adalah orde ACF.

4. Pemilihan Model Terbaik

Jika terdapat beberapa model yang layak digunakan, maka perlu dipilih satu model terbaik yang akan digunakan sebagai model estimasi. Pemilihan model terbaik dapat dilakukan dengan metode *Akaike Information Criterion* (AIC) dengan nilai AIC terkecil (Hanke & Wichern, 2005):

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2}{n} r \quad (27)$$

dengan:

$\hat{\sigma}^2$ = jumlah kuadrat residual dibagi banyaknya pengamatan

n = banyaknya pengamatan (residual)

r = banyaknya parameter dalam model

5. Identifikasi ARCH/GARCH

Setelah model ARIMA terbentuk maka perlu dilakukan identifikasi apakah variansi dari residual yang dihasilkan model ARIMA mengandung unsur heteroskedastisitas atau tidak. Adanya heteroskedastisitas mengindikasikan adanya efek ARCH/GARCH pada model. Uji *Lagrange Multiplier* (LM) merupakan suatu uji terhadap adanya unsur heteroskedastisitas dengan $\{\varepsilon^2\}$ merupakan kuadrat dari nilai residual model, kemudian meregresikan kuadrat residual dengan menggunakan konstanta dan nilai residual hingga lag ke-q, $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \ldots, \varepsilon_{t-p}^2$ sehingga membentuk persamaan regresi berikut

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{t-p}^2 \quad (28)$$

dengan $t = p + 1, \ldots, T$.

Hasil regresi ini akan menghasilkan nilai R^2 untuk menguji hipotesis berikut.

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$ (tidak terdapat efek ARCH)

H_1: minimal terdapat satu $\alpha_i \neq 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, p$ (terdapat efek ARCH)

Statistik uji: $LM = TR^2$ (29)

Dengan:

T = banyaknya data residual

R^2 = koefisien determinasi

Jika nilai hasil perkalian antara T dengan R^2 lebih besar dari nilai tabel *Chi Square* $X^2_{[\alpha:p]}$ maka data memiliki efek ARCH/GARCH (Iriani, Akbar, & Haryono, 2013).

6. Estimasi Parameter GARCH-t (1,1)

Misalkan r_t adalah residual model ARIMA pada waktu t, $t = 1, \ldots, T$. Diasumsikan bahwa r_t dapat diilustrasikan dari model *mean* dan sebuah model GARCH (1,1) sebagai berikut

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (30)$$

$$\varepsilon_t = z_t\sigma_t \quad (31)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \quad (32)$$

Vektor parameter yang diestimasi adalah $\boldsymbol{\psi} = \text{vec}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$, dengan $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \beta)'$. Estimasi parameter pada persamaan (30) diperoleh dengan meminimumkan negatif log *likelihood*-nya. Pada persamaan (31) residual terstandarisasi $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ diasumsikan berdistribusi *Student*-t dengan derajat bebas v yang memiliki fungsi densitas

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}(\pi v)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{v\sigma_t^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (33)$$

yang selanjutnya disebut dengan GARCH-t. Sehingga negatif log *likelihood*-nya yaitu

$$mll_t = -\log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\right) + \frac{1}{2}\log(\pi v) + \frac{v+1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{v\sigma_t^2}\right) \quad (34)$$

Bentuk persamaan (34) tidak *closed form* sehingga estimasi parameter didapatkan dengan metode Newton-Raphson. Berikut adalah perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian dari log *likelihood* model pada persamaan (34). Persamaan (34) dapat ditulis dalam bentuk

$$mll_t = c(v) + \frac{v+1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)$$

dengan

$$c(v) = -\log\left(\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right) + \log\left(\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\log(\pi v)$$

$c(v)$ merupakan fungsi v dan tidak bergantung kepada σ^2.

Derivatif dari $c(v)$ yaitu:

$$c_1(v) = \frac{dc(v)}{dv} = -\frac{1}{2}\,\Psi\left(\frac{v+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\Psi\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{2v}$$

$$c_2(v) = \frac{d^2c(v)}{dv^2} = -\frac{1}{4}\,\Psi_2\left(\frac{v+1}{2}\right) + \frac{1}{4}\,\Psi_2\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{1}{2v^2}$$

dengan fungsi Ψ adalah fungsi digamma dan menyatakan derivatif dari fungsi log(gamma).

Selanjutnya dihitung derivatif pertama dari mll_t terhadap v dan σ^2 sebagai berikut:

- $\frac{\partial mll_t}{\partial v} = c_1(v) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right) + \frac{v+1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]$

$$\frac{\partial mll_t}{\partial v} = c_1(v) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right) - \frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]} \quad (35)$$

- $\frac{\partial mll_t}{\partial \sigma^2} = \frac{v+1}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]$

$$\frac{\partial mll_t}{\partial \sigma^2} = \frac{\frac{v+1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_t^2}{\partial \sigma^2}\sigma_t^2 - \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \sigma^2}\varepsilon_t^2\right)}{(\sigma_t^2)^2 v + \sigma_t^2\varepsilon_t^2} \quad (36)$$

sehingga diperoleh

$$\nabla mll_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial mll_t}{\partial v} \\ \frac{\partial mll_t}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(v) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right) - \frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]} \\ \frac{\frac{v+1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_t^2}{\partial \sigma^2}\sigma_t^2 - \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \sigma^2}\varepsilon_t^2\right)}{(\sigma_t^2)^2 v + \sigma_t^2\varepsilon_t^2} \end{bmatrix}$$

yang akan bernilai optimum jika $\nabla mll_t = 0$.

Selanjutnya akan dihitung $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}$ dan $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^{2\prime}}$ sebagai berikut:

- Derivatif dari $\frac{\partial mll_t}{\partial v}$ yaitu $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2} = c_2(v) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{v(\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2)}\right]$$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2} = c_2(v) - \frac{(2v+1)\varepsilon_t^4 + (3v^2+2v)\varepsilon_t^2\sigma_t^2}{2v^2(\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2)^2} \quad (37)$$

- Derivatif dari $\frac{\partial mll_t}{\partial \sigma^2}$ yaitu $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^{2\prime}}$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^{2\prime}} = \frac{\partial mll_t}{\partial \sigma^{2\prime}}\left[\frac{v+1}{2}\,\frac{\frac{\partial \varepsilon_t^2}{\partial \sigma^2}\sigma_t^2 - \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \sigma^2}\varepsilon_t^2}{v(\sigma_t^2)^2 + \sigma_t^2\varepsilon_t^2}\right] \quad (38)$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka diperoleh estimasi parameter GARCH-t dengan metode Newton-Raphson sebagai berikut.

$$\hat{v}_{t+1} = \hat{v}_t - \left[\frac{\partial mll_t}{\partial v}\right]\left[\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}\right] \quad (39)$$

$$\widehat{\sigma^2}_{t+1} = \widehat{\sigma^2}_t - \left[\frac{\partial mll_t}{\partial \sigma^2}\right]\left[\frac{\partial^2 mll_t}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^{2\prime}}\right] \quad (40)$$

Iterasi akan berhenti jika $iterasi_{t+1} \approx iterasi_t$.

7. Uji Korelasi

Setelah estimasi parameter diperoleh, langkah selanjutnya adalah dilakukan pengujian korelasi untuk melihat hubungan diantara kedua saham. Pada data yang tidak berdistribusi normal dan bersifat nonparametrik dapat digunakan uji korelasi Tau Kendall. Dalam konsep korelasi Tau Kendall dikenal adanya istilah konkordan dan diskordan. Misalkan (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) menyatakan dua observasi dari vektor variabel acak kontinu (X, Y). Observasi-observasi (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) dikatakan konkordan jika $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ dan dikatakan diskordan jika $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$. Untuk $(x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0$ tidak dapat ditentukan apakah konkordan atau diskordan, karena korelasinya sebesar 0.

Misalkan sampel acak berukuran n dinyatakan dalam $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ dari vektor variabel acak kontinu (X, Y). Terdapat $\binom{n}{2}$ pasang (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) berbeda yang bisa didapatkan (baik konkordan maupun diskordan). Misalkan k jumlah pasangan yang konkordan dan d menyatakan jumlah pasangan diskordan. Korelasi Tau Kendall untuk sampel diberikan sebagai berikut:

$$\tau = \frac{k-d}{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (41)$$

dengan:

k = pasangan konkordan

d = pasangan diskordan

8. Estimasi Parameter Copula Clayton

Fungsi log *likelihood* copula Clayton bivariat observasi ke-t yaitu sebagai berikut:

$$l_t(u_1,u_2;\theta)=\log\left\{\frac{((1+\theta)\left(u_{1,t}^{-\theta}+u_{2,t}^{-\theta}-1\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)}}{\left(u_{1,t}u_{2,t}\right)^{\theta+1}}\right\}$$

$$=\left[\log(1+\theta)+\left(-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)\right)\log\left(u_{1,t}^{-\theta}+u_{2,t}^{-\theta}-1\right)\right]-\left[(\theta+1)\left(\log u_{1,t}+\log u_{2,t}\right)\right]$$

Misalkan $a=u_{i,t}$ dan $b=u_{j,t}$ maka

$$=\left[\log(1+\theta)+\left(-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)\right)\log\left(a^{-\theta}+b^{-\theta}-1\right)\right]-\left[(\theta+1)(\log a+\log b)\right]$$

Copula Clayton bivariat hanya memiliki satu parameter maka vektor gradien dan matriks Hessian adalah skalar, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial l_t}{\partial\theta}=\partial\left\{\frac{\left[\log(1+\theta)+\left(-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)\right)\log\left(a^{-\theta}+b^{-\theta}-1\right)\right]}{\partial\theta}-\frac{[(\theta+1)(\log a+\log b)]}{\partial\theta}\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{1+\theta}-\left(-\theta^{-2}\left(\log\left(a^{-\theta}+b^{-\theta}-1\right)-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)\left(\frac{1}{a^{-\theta}+b^{-\theta}-1}\right)\right)\right)\right]-[\theta(\log a+\log b)] \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{(1+\theta)^2}-\frac{2\left(a^{-\theta}\log a+b^{-\theta}\log b\right)}{\theta^2\left(a^{-\theta}+b^{-\theta}-1\right)}-\frac{2\log\left(a^{-\theta}+b^{\theta}-1\right)}{\theta^3}-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)\left\{\frac{a^{-\theta}\log^2 a+b^{-\theta}\log^2 b}{a^{-\theta}+b^{-\theta}-1}-\frac{\left(a^{-\theta}\log a+b^{-\theta}\log b\right)^2}{\left(a^{-\theta}+b^{-\theta}-1\right)^2}\right\} \quad (43)$$

9. Estimasi CVaR menggunakan Copula

Dalam konsep copula, dengan mengetahui copula dan informasi mengenai fungsi distribusi marginal masing-masing *return*, maka dapat diperoleh fungsi distribusi bersama sedemikian sehingga

$$F(r_1,r_2)=C\left(F_1(r_1),F_2(r_2)\right) \quad (44)$$

dengan $F_i(r_i)$ adalah fungsi distribusi marginal dari return saham pada $i=1,2$.

Jika $F_1(r_1)$ dan $F_2(r_2)$ memiliki model eksplisit, maka akan didapatkan model eksplisit bagi $F(r_1,r_2)$. Sehingga estimasi CVaR dengan tingkat kepercayaan α dapat diperoleh menggunakan persamaan sebagai berikut

$$\text{CVaR}(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_{VaR_{(1-\alpha)}(X)}^{\infty} z f_X(z)\,dz \quad (45)$$

dengan $f(z)$ adalah fungsi densitas dari z.

Distribusi variabel acak yaitu $rp_t\approx w_1r_{1t}+w_2r_{2t}$. Jika $F_1(r_1)$ dan $F_2(r_2)$ tidak memiliki model eksplisit, maka tidak diperoleh model eksplisit (penyelesaian analitik) bagi $F(r_1,r_2)$. Sehingga dalam keadaan demikian untuk mengestimasi CVaR dapat digunakan pendekatan dengan metode simulasi.

10. *Backtesting*

Backtesting adalah metode kuantitatif untuk menentukan apakah estimasi risiko suatu model konsisten terhadap asumsi-asumsi yang mendasari model yang sedang diuji. Metode *backtesting* yang digunakan dalam penelitian ini adalah uji *quantile approximation*. Metode ini menggunakan pendekatan terhadap hasil *backtesting* VaR (Emmer, Kratz, & Tasche, 2015). Hasil validasi nilai CVaR dapat direpresentasikan menggunakan validasi nilai VaR dengan pendekatan sebagai berikut:

$$\frac{1}{4}\left[\text{VaR}_{0.25(1-\alpha)}+\text{VaR}_{0.5(1-\alpha)}+\text{VaR}_{0.75(1-\alpha)}+\text{VaR}_{(1-\alpha)}\right] \quad (46)$$

Contoh, jika nilai tingkat kesalahan adalah 5%, maka akan dilakukan pengujian validasi terhadap nilai $\text{VaR}_{0.0125}$, $\text{VaR}_{0.025}$, $\text{VaR}_{0.0375}$, dan $\text{VaR}_{0.05}$.

Hipotesis:

H_0 : Semua hasil *backtesting* VaR diterima

H_1 : Terdapat hasil *backtesting* VaR yang ditolak

Untuk melakukan validasi terhadap nilai VaR dapat menggunakan metode *kupiec* dengan persamaan uji statistik sebagai berikut:

$$\zeta LR=-2\ln[(1-p)^{T-N}\,x\,P^N\,]\,x\,2\ln\left\{\left[1-\left(\frac{N}{T}\right)\right]^{(T-N)}\left(\frac{N}{T}\right)^N\right\} \quad (47)$$

dengan:

N = jumlah nilai kesalahan (nilai yang melebihi nilai *return*)

T = banyaknya data observasi

p = $(1-\alpha)$

H_0 : $\zeta LR<\chi^2_{(1;\alpha)}$ atau p-value > α: 0.05

H_1 : $\zeta LR>\chi^2_{(1;\alpha)}$ atau p-value < α: 0.05

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Langkah-langkah dalam estimasi CVaR pada portofolio menggunakan copula bersyarat adalah sebagai berikut:

a. Menetapkan model distribusi marginal yang sesuai dengan karakteristik data. Data pada skripsi ini bersifat *fat tailed* dengan kurtosis lebih dari 3, sehingga data dimodelkan dalam GARCH-t.

b. Estimasi parameter distribusi marginal untuk selanjutnya diperoleh residual yang ditransformasi yang berdistribusi $U(0,1)$.
c. Melakukan uji korelasi antar marginal.
d. Estimasi parameter pada copula Clayton.
e. Membangkitkan bilangan acak (u_1, u_2) menggunakan data sampel variabel acak pada *software* R Studio kemudian dimodelkan menggunakan copula Clayton dengan n tertentu.
f. Menghitung *return* bivariat (r_{1t}, r_{2t}) untuk $t = 1,2, \dots, n$ dengan $r_1 = F^{-1}(u_1)$ dan $r_2 = G^{-1}(u_2)$, F^{-1} dan G^{-1} berturut-turut menyatakan invers dari fungsi distribusi marginal dari r_1 dan r_2.
g. Menghitung *return* portofolio $R_p = w_1 r_{1t} + w_2 r_{2t}$.
h. Menghitung CVaR_p dengan tingkat kepercayaan (α) berdasarkan *return* portofolio R_{pt}.
i. Langkah 5,6,7,8 dapat diulang sebanyak *M* kali dan diperoleh bilangan $R_{p(\alpha)}^1, R_{p(\alpha)}^2, \dots, R_{p(\alpha)}^N$.
j. Melakukan perhitungan $\mathrm{CVaR}_{(1-\alpha)}$ menggunakan nilai rata-rata CVaR_p.

Saran

Saran yang dapat penulis berikan bagi pembaca yang berminat terhadap estimasi CVaR, disarankan untuk menggunakan copula dari keluarga atau kelas yang lain, misalnya dari keluarga Gumbel yang berasal dari kelas Archimedian atau dari keluarga *Student-t* yang berasal dari kelas *Elliptical* yang diharapkan dapat memberikan wawasan yang lebih luas dan hasil yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Best, P. (1998). *Implementing Value at Risk.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Bohm, G., & Zech, G. (2010). *Introduction to Statistics and Data Analysis for Physicists.* Humberg: Deutssches Electronen-Synchroton.

Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* USA: Holden Day.

Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Emmer, S., Kratz, M., & Tasche, D. (2015). What is the risk measure in practice? A comparison of standard measures. *Journal of Risk, Vol. 18, No. 2*.

Hanke, J. E., & Wichern, D. W. (2005). *Business Forecasting.* New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Hartono, J. (2014(a)). *Teori Portofolio dan Analisis Investasi* (Edisi Kesembilan ed.). Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

Iriani, N. P., Akbar, M. S., & Haryono. (2013). Estimasi Value at Risk (VaR) pada Portofolio Saham dengan Copula. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, Vol. 2, No.2, 195-200.

Joe, H., & Xu, J. J. (1996). *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models.* Technical Report No. 166 Department of Statistics, University of British Columbia.

Nelsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas.* New York: Springer.

Rockafellar, R., & Uryasev. (2000). Optimization of Conditional Value at Risk. *Journal of Risk 2*, 21-41.

Rusdi. (2011). Uji Akar-Akar Unit dalam Model. *Statistika, Volume 11 Nomor 2, November 2011*, 67–78.

Sumariska, N., & Subekti, R. (2016). Penerapan Metode Mean Conditional Value at Risk pada Portofolio Black-Litterman. *S1 Thesis*.

Tsay, R. S. (2001). *Analysis of Financial Time Series.* New York: Springer.

Wei, W. W. (1990). *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods.* Boston: Addison-Wesley Pub.

Yang, X. (2014). *Some Extensions of the Black-Litterman Model.* Instituo Nacional de Matematica Pura e Aplicada.