VALUE AT RISK (VaR) MENGGUNAKAN METODE GARCH-VINE COPULA PADA PORTOFOLIO

VALUE AT RISK (VaR) USING GARCH-VINE COPULA METHOD AT PORTFOLIO

Oleh : Herida Okta Pintari[1], Retmo Subekti[2]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika
heridaokta14@gmail.com[1], retnosubekti@uny.ac.id[2]

Abstrak

Value at Risk (VaR) merupakan salah satu alat ukur yang dapat digunakan untuk menghitung risiko pada portofolio. Beberapa metode pengukuran VaR mengasumsikan return berdistribusi normal dan ukuran dependensi diantara saham portofolio menggunakan korelasi linear. Pada dasarnya asumsi normalitas pada data finansial jarang dipenuhi dan return mengindikasikan adanya heteroskedastisitas. Selain itu, kebergantungan antar saham yang non-linear tidak sesuai jika diukur dengan korelasi linear. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui prosedur perhitungan VaR dengan metode GARCH-Vine Copula. Vine Copula adalah fungsi distribusi multivariat yang menggabungkan distribusi marginal return univariat dalam portofolio, sekaligus dapat menggambarkan struktur kebergantungan non-linearnya. Pembentukan distribusi marginal menggunakan model GARCH dengan asumsi distribusi *Student-t* untuk mengatasi adanya heteroskedastisitas. Hasil penelitian diperoleh langkah utama untuk pengukuran VaR adalah menghitung return saham, menentukan model marginal dengan GARCH, kemudian menggabungkan distribusi marginal menjadi distribusi bersama dengan Vine Copula, dan menghitung nilai VaR.

Kata kunci: *Value at Risk*, Vine Copula, GARCH, Portofolio

Abstract

Value at Risk (VaR) is a measuring instrument that can be used to calculate the risk on the portfolio. Several methods of measuring VaR assumes normal and return the size of the dependencies between the stock portfolio using a linear correlation. Basically the assumption of normality on the financial data is rarely met and return indicates a heteroskedasticity. In addition, relying inter shares the non-linear is not appropriate if measured by a linear correlation. The purpose of this research is to know the procedure of calculation of VaR with GARCH-methods of Vine Copula. Vine Copula is a multivariate distribution function that combines the univariate marginal distribution of return in a portfolio, and can describe the structure of dependent non-linear. The formation of the marginal distribution using GARCH model assuming the Student-t distribution to address the presence of heteroskedastisitas. The research results obtained are the main steps for measurement VaR is calculated the return stock, determine the marginal models with GARCH, then merge into the marginal distribution of the distribution along with a Vine Copula, and calculate the value of VaR.

Keywords: Value at Risk, Vine Copula, GARCH, portfolio

PENDAHULUAN

Portofolio merupakan kombinasi atau gabungan atau sekumpulan aset baik berupa aset riil maupun aset finansial yang dimiliki oleh investor (Halim, 2005: 72). Pengukuran risiko atas suatu portofolio merupakan hal yang sangat penting agar investor dapat memperoleh keuntungan maksimal dengan tingkat risiko yang minimal. Salah satu alat ukur yang dapat digunakan untuk menghitung risiko terbesar pada portofolio adalah *Value at Risk* (VaR). Menurut Jorion (2002), VaR adalah estimasi kerugian maksimum yang akan diperoleh selama periode waktu tertentu pada tingkat kepercayaan tertentu. VaR dapat dikategorikan sebagai pengukur risiko yang sederhana, tetapi VaR tidak mudah untuk diestimasi.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghitung VaR, salah satunya adalah metode variansi-kovariansi. Metode ini mengasumsikan bahwa return berdistribusi normal dan mengukur kebergantungan antar saham dengan korelasi linear.

Faktanya data finansial memiliki dua sifat penting, yaitu distribusi bersifat *fat tails* yang ditandai dengan kurtosis bernilai positif, dan adanya *volatility clustering* (Bollerslev, Engle, & Nelson, ARCH models, 1994). Selain itu, pada data finansial asumsi normalitas jarang dipenuhi dan struktur kebergantungan antar saham adalah hal yang sulit diamati karena merupakan kebergantungan yang tak linear. Penyimpangan ini mengakibatkan tidak validnya estimasi VaR sehingga risiko yang diperoleh lebih besar dari risiko yang ditetapkan. Untuk mengatasi kelemahan tersebut, diperkenalkan suatu alat yaitu copula.

Copula merupakan suatu fungsi yang dapat menggabungkan beberapa distribusi marginal menjadi distribusi bersama (Suharto, Dharmawan, & Sumarjaya, 2017). Pada analisis statistika multivariat, copula digunakan sebagai pendekatan yang berguna untuk mempelajari kebergantungan tak linear antar kejadian dalam kasus multivariat. Sehingga copula dapat memodelkan struktur kebergantungan antar saham dan cukup fleksibel untuk memodelkan data return finansial yang tidak memenuhi sifat-sifat distribusi normal.

Beberapa peneliti telah mengaplikasikan Copula untuk menghitung nilai risiko dari portofolio saham yang cenderung memiliki volatilitas tinggi. Dharmawan (2014) mengaplikasikan t-Copula untuk mengestimasi VaR portofolio yang terdiri dari indeks Jakarta *Stock Exchange* dan indeks Kuala Lumpur *Stock Exchange*. Kemudian Renggani, Pintari, dan Subekti (2017) mengestimasi nilai VaR potofolio menggunakan Elliptical Copula saham PTBA dan BBRI.

Pemodelan dengan Copula memiliki beberapa kelemahan, yaitu pada kasus multivariat, penentuan fungsi copula sulit untuk dilakukan dan keluarga yang dapat digunakan terbatas. Selain itu, copula hanya dapat memodelkan struktur kebergantungan yang terlalu sederhana dan simetris (Geidosch & Fischer, 2016). Untuk itu, apabila struktur ketergantungan antar saham lebih kompleks dan lebih mengeksplorasi adanya ketergantungan berpasangan antar saham pada portofolio multivariat maka dapat digunakan perhitungan VaR dengan menggunakan Vine Copula.

Vine Copula merupakan fungsi distribusi multivariat yang menggabungkan distribusi marginal, sekaligus dapat menggambarkan struktur kebergantungan non-linearnya. Konsep dari Vine Copula adalah mendekomposisi fungsi copula multivariat menjadi fungsi copula berpasangan (copula bivariat). Fungsi copula berpasangan ini diperoleh dari keluarga copula bivariat (Joe, 1997).

Pada penelitian ini mengkaji bagaimana prosedur pengukuran *Value at Risk* pada portofolio menggunakan metode GARCH-Vine Copula, khususnya pada portofolio multivariat. Sehingga investor dapat mengetahui resiko yang akan diperoleh apabila berinvestasi pada suatu portofolio.

KAJIAN PUSTAKA

A. Return

Return merupakan salah satu faktor yang memotivasi investor untuk berinvestasi karena dapat menggambarkan secara nyata perubahan harga. Rumus return dari aset tunggal dapat dihitung dengan rumus berikut (Tsay, 2005).

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

dengan P_t adalah harga saham periode sekarang dan P_{t-1} adalah harga saham periode sebelumnya.

B. Portofolio

Portofolio adalah kumpulan dari beberapa sekuritas dengan bobot tertentu. Teori portofolio ini didasarkan pada kenyataan bahwa pemilik modal akan menginvestasikan uangnya ke berbagai jenis surat berharga dengan tujuan mengurangi risiko yang harus ditanggung dan kemudian ingin mendapatkan pengembalian yang lebih tinggi. Dalam teori ini, risiko investasi dalam saham didefinisikan sebagai standar deviasi atau variansi dari tingkat keuntungan. Semakin besar risiko berinvestasi maka semakin besar tingkat keuntungan yang diperoleh (Tandelilin, 2007: 60).

C. Metode Newton Raphson

Apabila langkah mengestimasi parameter menggunakan metode maksimum *likelihood* menghasilkan persamaan yang tidak *close form*, maka penyelesaian untuk memperoleh nilai estimator parameter persamaan tersebut menggunakan metode Newton Rapshon (Rao, 1997). Metode ini merupakan perhitungan yang iteratif, sehingga akan lebih mudah jika dikerjakan dengan bantuan program komputer.

Metode Newton-Rapshon menurut Chapra dan Canale (1998: 153) didasarkan pada deret Taylor sebagai berikut :

$$f(\theta_{i+1}) = f(\theta_i) + f'(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) + \frac{f''(\theta_i)}{2!}(\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + \cdots + \frac{f^n(\theta_i)}{n!}(\theta_{i+1} - \theta_i)^n \qquad (2)$$

Persamaan *likelihood* dengan parameter θ dapat diselesaikan sehingga memperoleh nilai estimator $\hat{\theta}$ dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Rumus estimasi parameter $\hat{\theta}$ pada iterasi ke $(t+1)$ dalam proses iterasi $(t = 0,1,2,\ldots)$ adalah sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t - \boldsymbol{D}(\theta_t)^{-1}\boldsymbol{d}(\theta_t) \qquad (3)$$

dengan $\hat{\theta}_{t+1}$ adalah estimasi parameter θ pada iterasi ke-$(t+1)$. $\hat{\theta}_t$ adalah estimator parameter θ pada iterasi ke-t. $\boldsymbol{d}(\theta_t)$ adalah matriks turunan pertama fungsi likelihood, sehingga entri dari $\boldsymbol{d}(\theta_t)$ adalah $\frac{\partial \mathcal{LL}(\theta)}{\partial \theta}$. $\boldsymbol{D}(\theta_t)$ adalah matriks turunan kedua fungsi likelihood, sehingga entri dari $\boldsymbol{D}(\theta_t)$ adalah $\frac{\partial^2 \mathcal{LL}(\theta)}{\partial \theta^2}$.

Menurut Montgomery, Peck, dan Vining (2012: 605) proses iterasi dengan menggunakan metode Newton Raphson terus dilakukan hingga didapatkan nilai $\hat{\theta}$ yang konvergen, yaitu sampai $\left|\frac{\hat{\theta}_{t+1} - \hat{\theta}_t}{\hat{\theta}_t}\right| < \varepsilon$, dengan $\varepsilon > 0$ bilangan yang sangat kecil.

D. Metode *Inference for Margins* (IFM)

Metode *Inference Function for Margin* (IFM) diusulkan oleh Joe dan Xu (1996) atau sering juga disebut dengan metode parametrik yang terdiri dari dua langkah, dengan dasar dari tiap langkah masih mengandung pendekatan log *likelihood*. Dengan membentuk fungsi log *likelihood* $\mathcal{LL}_s, s = 1,2,\ldots,S,$ secara independen satu sama lain, untuk mengestimasi vektor parameter marginal $\widetilde{\alpha_\iota}$ pada langkah pertama dan langkah kedua fungsi $\mathcal{LL}_c$ dioptimalkan, berdasarkan hasil estimasi langkah pertama. Oleh karena itu vektor skor langkah pertama untuk marginal ke-s diberikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \mathcal{LL}_s\,(\psi_s; x_s)}{\partial a_s} = \left(\frac{\partial \mathcal{LL}_s}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{LL}_s}{\partial a_s}\right)', s = 1,2,\ldots,S \qquad (4)$$

Untuk mengestimasi parameter-parameter pada langkah kedua, persamaan vektor bersyarat yang diperoleh dari log *likelihood* diberikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \mathcal{LL}_c(\theta, \psi_s; x_s)}{\partial \theta_s} = \left(\frac{\partial \mathcal{LL}_c}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{LL}_c}{\partial \theta_s}\right)' \qquad (5)$$

Dengan kata lain, metode IFM mengasumsikan pengerjaan secara independen diantara parameter-parameter marginal dan log *likelihood*nya. Aturan yang digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter dengan IFM hampir sama dengan metode MLE.

E. Uji Kolmogorov Smirnov

Uji Kolmogorov Smirnov dapat digunakan untuk menguji kenormalan data (Siegel, 1990: 59). Hipotesis pada uji Kolmogorov Smirnov adalah sebagai berikut

H_0: Data berasal dari populasi berdistribusi normal
H_1: Data tidak berasal dari populasi berdistribusi normal

Statistik Uji:

$$D = Sup_x|S_{(x)} - F_0(x)| \qquad (6)$$

dengan

$S_{(x)}$: nilai distribusi kumulatif sampel
$F_0(x)$: nilai distribusi kumulatif distribusi normal
Sup_x : nilai supremum untuk semua x dari $|S_{(x)} - F_0(x)|$

Apabila nilai $D_{hit} > D_{(1-\alpha),n}$ maka diambil keputusan tolak H_0 dengan $D_{(1-\alpha),n}$ merupakan nilai tabel Kolmogorov-Smirnov pada kuantil (1-α) dan n merupakan banyaknya observasi.

F. Proses *Autoregressive Moving Average* (ARIMA)

Model *Autoregressive* (AR) dengan order p dinotasikan dengan AR(p) atau ARIMA (p,0,0). Menurut (Wei, 2006: 33) bentuk umum AR(p) dapat dinotasikan sebagai:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (7)$$

Bentuk umum model *Moving Average* pada tingkat order q yang dapat dituliskan MA(q) atau ARIMA (0,0,q) didefinisikan sebagai:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (8)$$

Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA) merupakan suatu bentuk kombinasi antara proses *autoregressive* dan *moving average* yang sering disebut dengan proses ARMA dengan ordo p dan q yang ditulis ARMA (p,q) atau ARIMA (p,0,q). Bentuk umum model ini adalah

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (9)$$

Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) merupakan model ARMA (p,q) yang tidak stasioner. Bentuk umum model ARIMA (p,d,q) adalah:

$$(1-B)^d (Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p}) = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (10)$$

Identifikasi model ARIMA dapat dilakukan melalui pemeriksaan plot ACF yang menunjukkan order q dan PACF yang menunjukkan order q.

Pengujian signifikansi parameter dapat dilakukan melalui tahapan berikut.

1) Hipotesis
   AR (*Autoregressive*)
   $H_0 : \phi = 0$ vs $H_1 : \phi \neq 0$
   MA (*Moving Average*)
   $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta \neq 0$
2) Statistik Uji

$$t_{hit}(AR) = \frac{\hat{\phi}}{SE(\hat{\phi})} \quad (11)$$

$$t_{hit}(MA) = \frac{\hat{\theta}}{SE(\hat{\theta})} \quad (12)$$

dengan $\hat{\phi}$ adalah estimator dari ϕ, $\hat{\theta}$ adalah estimator dari θ, $SE(\hat{\phi})$ adalah standar error yang diestimasi dari ϕ, dan $SE(\hat{\theta})$ adalah standar error yang diestimasi dari θ.

3) Kriteria keputusan : Tolak H_0 jika$|t_{hit}| > t_{\frac{\alpha}{2};df=n-n_p}$ atau $p - value < \alpha$

G. Uji Ljung Box dan Uji Lagrange Multiplier

Setelah model runtun waktu diperoleh, maka perlu dilakukan pemeriksaan untuk mengetahui apakah residual yang dihasilkan bersifat *white noise* atau tidak dengan menggunakan uji Ljung-Box (Q) yang dihitung dengan nilai residual r_k dengan hipotesis sebagai berikut.

$H_0: r_1 = r_2 = \cdots = r_K = 0$ vs H_1: minimal ada satu $r_k \neq 0$ untuk $k = 1,2,,..K$

Statistik Uji

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{r_k^2}{n-k} \quad (13)$$

dengan n adalah banyak observasi, k adalah banyak lag yang diuji, dan r_k adalah sampel ACF dari residual lag-k (Hanke & Wichern, 2005: 65). Keputusan terhadap hipotesis autokorelasi residual didasarkan apabila nilai $Q \leq x^2_{[\alpha:db]}$ tabel dengan derajat bebas (db) adalah K dikurangi banyak parameter pada model atau *p-value* dari statistik uji Q lebih besar dari nilai α, maka terima H_0 yang artinya residual memenuhi asumsi *white noise*.

Uji *Lagrange Multiplier* adalah pengujian untuk mengetahui keberadaan ARCH atau keberadaan heteroskedastisitas dalam runtun waktu. Langkah pertama dari uji ini adalah mengestimasi model ARIMA dari data dan mendapatkan errornya. Langkah selanjutnya dilakukan dengan meregresikan error kuadrat dengan menggunakan konstanta dan nilai error sampai lag ke g, $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \ldots, \varepsilon_{t-g}^2$ sehingga membentuk persamaan regresi sebagai berikut.

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_g \varepsilon_{t-g}^2 \;; \quad t = g+1, \ldots, T \quad (14)$$

Nilai g dapat ditentukan dengan melihat plot PACF residual kuadrat (Tsay, 2005: 101). Hasil regresi ini akan menghasilkan nilai yang akan digunakan untuk menguji hipotesis berikut.

1) Hipotesis:
   $H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_g = 0$ (tidak terdapat unsur ARCH) vs H_1: minimal ada satu $\alpha_g \neq 0$ (terdapat unsur ARCH)
2) Statistik Uji:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/g}{SSR_1/(T-2g-1)} \quad (15)$$

   dengan $SSR_0 = \sum_{t=g+1}^{T} (\varepsilon_t^2 - \overline{\omega})^2$, $SSR_1 = \sum_{g+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2$, $\overline{\omega}$ adalah rata-rata sampel dari ε_t^2 dengan $\overline{\omega} = \frac{1}{n}(\sum_{t-1}^{T} \varepsilon_t^2)$, dan $\hat{\varepsilon}_t$ adalah error kuadrat terkecil.
3) Kriteria keputusan: Apabila $F > \chi_g^2(\alpha)$ atau nilai $p - value$ dari F lebih kecil dari α, maka H_0 ditolak yang mengindikasikan error data

memiliki efek ARCH/GARCH atau bersifat heteroskedastisitas.

H. Pemilihan Model Terbaik

Jika pada hasil pemeriksaan diagnostik terdapat beberapa model yang layak digunakan maka perlu dipilih model terbaik yang akan digunakan sebagai model peramalan. Pemilihan model ini dapat dilakukan dengan metode AIC (*Akaike Information Criterion*) dengan rumus sebagai berikut :

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2}{n} n_p \qquad (16)$$

dengan $\hat{\sigma}^2$ menyatakan kuadrat jumlah dari residual dibagi banyak residual, n menyatakan banyaknya residual, dan n_p menyatakan banyaknya parameter yang diduga dalam model. Model terbaik adalah model yang memiliki nilai AIC terkecil (Hanke &Wichern, 2005: 413).

I. Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH)

Model GARCH (g, h) memiliki persamaan umum sebagai berikut.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{a=1}^{g} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{b=1}^{h} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \qquad (17)$$

dengan $g \geq 0, h > 0,\ \omega > 0, \alpha_{\mathrm{b}} \geq 0$,untuk $\mathrm{b} = 1, \ldots, h$, dan$\beta_a \geq 0$, untuk$a = 1, \ldots, g$.

Diasumsikan semua parameter adalah positif. Bila $g = h = 1$, maka diperoleh estimator GARCH (1,1) dengan masing-masing distribusi adalah normal standar (GARCH-n) atau Student-t standar (GARCH-t), maka model didefinisikan sebagai berikut :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \qquad (18)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \qquad (19)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (20)$$

J. Uji Dependensi

Dalam kondisi hubungan non linear antar variabel, korelasi Kendall Tau dapat digunakan sebagai ukuran dependensi alternatif (Matteis, 2001). Uji korelasi Tau Kendall dilakukan dengan hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0: \tau = 0$ (dua variabel independen) vs$H_1: \tau \neq 0$ (dua variabel tidak independen)

Statistik Uji

$$Z = \sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}} |\tau| \qquad (21)$$

dengan

$$\tau = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}} \qquad (22)$$

Misalkan c menyatakan banyak pasangan konkordan dan d menyatakan banyak pasangan diskordan. Apabila $Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ maka H_0 ditolak.

K. *Value at Risk* (VaR)

Menurut Jorion (2007), VaR merupakan metode untuk menilai risiko yang menggunakan teknik statistik standar yang secara rutin digunakan di bidang teknik lainnya. VaR merupakan alat ukur yang dapat menghitung besarnya kerugian terburuk yang dapat terjadi dengan mengetahui posisi asset, tingkat kepercayaan akan terjadinya risiko, dan jangka waktu penempatan *asset* (*time horizon*).

VaR pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$VaR = W_0 \, Z_{1-\alpha} \, \sigma(Rp) \qquad (23)$$

dengan W_0 merupakan nilai awal investasi, dan $\sigma(R_p)$ adalah standar deviasi return.

L. *Backtesting*

Backtesting adalah prosedur dimana keuntungan atau kerugian aktual dibandingkan dengan estimasi *Value at Risk*. Bila estimasi dari VaR tidak akurat, model perhitungan harus dikaji ulang apakah terdapat asumsi yang tidak benar, pengukuran yang salah, atau pemodelan yang tidak akurat. Metode *Backtesting* yang digunakan pada penelitian ini adalah *Kupiec test*.

Metode ini membandingkan setiap VaR yang telah dihitung dengan *profit* atau *loss* yang sebenarnya dan kemudian mencatat tingkat kegagalan (*failure rate*) yang terjadi. Berdasarkan hasil backtesting dengan menggunakan *Kupiec Test* digunakan pendekatan berdasarkan nilai log *likelihood Ratio* (LR) (Jorion, 2007).

Hipotesis untuk pengujian Kupiec Test adalah sebagai berikut :

H_0 : VaR akurat vs H_1 : VaR tidak akurat

Statistik Uji

$$LR = -2 \ln[(1-P)^{n-M} \, x \, P^M] \, x \; 2 \ln\left\{\left[1 - \left(\frac{M}{n}\right)\right]^{(T-M)} \left(\frac{M}{n}\right)^M\right\} \qquad (24)$$

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Copula

Copula merupakan suatu fungsi distribusi multivariat dengan fungsi distribusi marginalnya (univariat) adalah uniform standar [0,1] (Nelsen, 2006: 23). Fungsi copula memiliki konsep sebagai alat untuk mempelajari kebergantungan tak linear antara kejadian dalam kasus multivariat. Copula semakin banyak digunakan pada pemodelan distribusi multivariat karena tidak memerlukan asumsi normalitas pada marginalnya sehingga cukup fleksibel dalam berbagai data terutama untuk data return finansial yang tidak memenuhi sifat-sifat distribusi normal.

Pada umumnya keluarga copula yang sering digunakan terdiri atas Copula Elliptical dan Copula Archimedean. Pada penelitian ini menggunakan keluarga Copula Archimedean, yaitu Copula Clayton, Gumbel, dan Frank.

1) Copula Clayton

Fungsi generator Copula Clayton adalah

$$\varphi(u) = u^{-\gamma} - 1 \qquad (25)$$

sehingga fungsi copula clayton berdimensi 2 adalah

$$C^{Clay}(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\gamma} + u_2^{-\gamma} - 1\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \qquad (26)$$

dengan menderivatifkan persamaan (26) terhadap u_1 dan u_2 maka diperoleh fungsi densitas Copula Clayton sebagai berikut :

$$c^{Clay}(u_1, u_2) = \frac{(1+\gamma)\left(u_1^{-\gamma} + u_2^{-\gamma} - 1\right)^{-(\frac{1}{\gamma}+2)}}{(u_1 u_2)^{\gamma+1}} \qquad (27)$$

2) Copula Gumbel

Fungsi generator dari Copula Gumbel adalah

$$\varphi(u) = (-\ln u)^{\gamma} \qquad (28)$$

sehingga fungsi Copula Gumbel berdimensi 2 adalah

$$C^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\{-[(-\ln u_1)^{\gamma} + (-\ln u_2)^{\gamma}]^{\frac{1}{\gamma}}\} \qquad (29)$$

dengan menderivatifkan persamaan (29) terhadap u_1 dan u_2 maka diperoleh fungsi densitas Copula Gumbel

$$c^{Gu}(u_1, u_2) = c(u_1, u_2) u_1^{-1} u_2^{-1} (-\ln u_1)^{\gamma} (-\ln u_2)^{\gamma} \left[(-\ln u_1)^{\gamma} + (-\ln u_2)^{\gamma}\right]^{-2+\frac{1}{\gamma}} [(-\ln u_1)^{\gamma} (-\ln u_2)^{\gamma} + \gamma - 1] \qquad (30)$$

3) Copula Frank

Fungsi generator dari Copula Frank adalah

$$\varphi(u) = \ln\left[\frac{e^{-\gamma u} - 1}{e^{-\gamma} - 1}\right] \qquad (31)$$

sehingga fungsi copula clayton berdimensi 2 adalah

$$C^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1 + \frac{(e^{(-\gamma u_1)} - 1)(e^{-\gamma u_2} - 1)}{(e^{-\gamma} - 1)}\right) \qquad (32)$$

dengan menderivatifkan persamaan (32) terhadap u_1 dan u_2 maka diperoleh fungsi densitas Copula Frank

$$c^{Fr}(u_1, u_2) = \frac{-\gamma\,(e^{-\gamma} - 1)(e^{-\gamma(u_1+u_2)})}{[(e^{-\gamma u_1} - 1)(e^{-\gamma u_2} - 1) + (e^{-\gamma} - 1)]^2} \qquad (33)$$

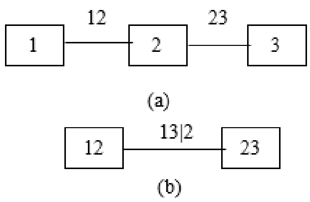
B. Vine Copula

Vine Copula atau yang dikenal juga dengan *Pair* copula (copula berpasangan) memberikan cara yang lebih fleksibel dalam mengkonstruksi distribusi multivariat. Ide pokok dari *pair* copula yaitu menjelaskan bahwa copula multivariat dapat didekomposisikan menjadi pasangan copula bivariat.

Vine copula diterapkan jika sedikitnya 3 dimensi peubah acak yang ingin diketahui fungsi bersamanya. Dengan vine copula, fungsi densitas d dimensi dapat diperoleh dengan melakukan dekomposisi sehingga diperoleh hasil kali dari densitas marginalnya dengan densitas copula berpasangan. Dalam melakukan pemilihan model yang tepat haruslah menentukan struktur (*tree*), keluarga copula, dan menduga parameter copula. Untuk menentukan struktur (*tree*), pada penelitian ini dibahas 2 jenis vine copula, yaitu C-vine copula, dan D-vine copula.

1) D-Vine Copula

D-vine copula memiliki struktur grafik dengan setiap *tree* merupakan suatu *path*. Jika terdapat d dimensi, maka banyaknya *tree* adalah $d - 1$. Misal, untuk 3 dimensi, maka diperoleh 2 *tree* sebagai berikut:



Gambar 1. D-Vine Copula 3 Dimensi (a) Pohon 1 (b) Pohon 2

Sehingga fungsi densitas D-Vine menurut dekomposisi pada Gambar 1 adalah

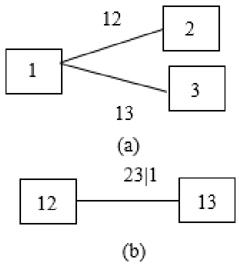
$$f(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_1).f_2(x_2).f_3(x_3)c_{12}(F_1(x_1),F_2(x_2)) .c_{23}(F_2(x_2),F_3(x_3)).c_{13|2}(F(x_1|x_2),F(x_3|x_2)) \quad (34)$$

Secara umum fungsi densitas, D-Vine berdimensi d adalah

$$f(x_1,\dots,x_d) = \prod_{k=1}^{d} f(x_k) \prod_{j=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{d-j} c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1} \left(F(x_i|x_{i+1},\dots,x_{i+j-1})F(x_{i+j}|x_{i+1},\dots,x_{i+j-1})\right) \quad (35)$$

2) C-Vine Copula

C-vine copula memiliki struktur grafik (tree) dengan setiap tree memiliki node yang unik yaitu yang dihubungkan ke seluruh node. Jika terdapat d dimensi, maka banyaknya tree adalah d−1. Misal, untuk 3 dimensi, maka diperoleh 2 tree sebagai berikut:



Gambar 2. C-Vine Copula 3 Dimensi (a) Pohon 1 (b) Pohon 2

Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa variabel 1 bertindak sebagai variabel kunci dalam C-Vine yang berinteraksi dengan seluruh variabel dalam data. Oleh karena itu, pembentukan C-Vine akan menguntungkan ketika suatu variabel telah diketahui sebagai variabel kunci. Selanjutnya variabel kunci ini menjadi akar dari struktur C-Vine (Liu, 2011).

Sehingga fungsi densitas C-Vine menurut dekomposisi pada Gambar 2 adalah

$$f(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_1).f_2(x_2).f_3(x_3)c_{12}(F_1(x_1),F_2(x_2)) c_{13}(F_1(x_1),F_3(x_3)).c_{23|1}(F_2(x_2|x_1),F_3(x_3|x_1)) \quad (36)$$

Secara umum fungsi densitas, C-Vine berdimensi d adalah

$$f(x_1,\dots,x_d) = \prod_{k=1}^{d} f(x_k) \prod_{j=1}^{d-1}\prod_{i=1}^{d-j} c_{j,j+i|1,\dots,j-1} \left(F(x_j|x_1,\dots,x_{j-1}),F(x_{j+i}|x_1,\dots,x_{j-1})\right) \quad (37)$$

C. Estimasi Parameter

Estimasi parameter copula dapat diperoleh dengan menggunakan metode maximum *likelihood* (MLE). Pada bagian ini akan dijelaskan estimasi parameter dari densitas C-Vine dan D-Vine dengan maximum *likelihood*. Asumsikan terdapat d variabel pada T titik waktu, estimasi parameter dapat dilakukan secara simultan terhadap distribusi marginal dan pasangan copula metode MLE. Namun, komputasi dengan metode ini akan semakin kompleks seiring bertambahnya dimensi variabel (Liu, 2011). Oleh karena itu, pada pembahasan ini digunakan metode *Inference Function for Margins* (IFM) dimana estimasi parameter dilakukan dalam dua tahap dan dasar dari tiap tahapnya menggunakan pendekatan log *likelihood* (Joe & Xu, 1996). Pada tahap pertama metode IFM, dilakukan estimasi parameter dari distribusi marginal.

Berdasarkan densitas C-Vine dan D-Vine yang telah dibentuk pada persamaan (35) dan (37) maka dapat diperoleh fungsi log *likelihood* untuk C-Vine yaitu

$$l_{C-Vine}(x;\gamma) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{t=1}^{T}\log(f(x_k)) + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3-j}\sum_{t=1}^{T}\log(c_{j,j+1|1,\dots,j-1} \left(F(x_{j,t}|x_{1,t},\dots,x_{j-1,t}),F(x_{j+i,t}|x_{1,t},\dots,x_{j'-1,t})\right)) \quad (38)$$

dan fungsi log *likelihood* untuk D-Vine yaitu

$$l_{D-Vine}(x;\gamma) = \sum_{A=1}^{3}\sum_{t=1}^{T}\log(f(x_A)) + \sum_{j'=1}^{2}\sum_{i'=1}^{3-j'}\sum_{t=1}^{T}\log(c_{i',i'+j'|i'+1,\dots,i'+j'-1} \left((F(x_{i,t}|x_{i+1,t},\dots,x_{i+j-1,t}),F(x_{i+j,t}|x_{i+1,t},\dots,x_{i+j-1,t})\right)) \quad (39)$$

1. Estimasi Parameter GARCH-t (1,1)

Tahap pertama dalam metode IFM adalah langkah untuk mengestimasi parameter model marginal $f(x_k)$ untuk C-Vine dan D-Vine dari persamaan (38) dan (39).

Misalkan r_t adalah residual model ARIMA pada waktu t, $t = 1,..,T$. Diasumsikan bahwa r_t dapat digambarkan dari model mean dan sebuah model GARCH (1,1) pada persamaan (18), (19), dan (20).

Vektor parameter yang akan diestimasi adalah $\boldsymbol{\psi} = vec(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\eta})$, dimana $\boldsymbol{\eta} = (\alpha_0,\alpha_1,\beta)'$. Estimasi parameter untuk persamaan (18) akan diperoleh dengan cara meminimumkan negatif log *likelihood*-nya. Pada persamaan (20), residual terstandarisasi $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ diasumsikan berdistribusi *Student*-t (GARCH-t) dengan derajat bebas v yang memiliki fungsi densitas

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}(\pi v)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{v\sigma_t^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \qquad (40)$$

Sehingga persamaan negatif log *likelihood*-nya sebagai berikut :

$$mll_t=-log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\right)+\frac{1}{2}\log(\pi v)+\frac{v+1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{v\sigma_t^2}\right) \qquad (41)$$

karena bentuk persamaan (43) tidak *closed form* maka untuk mendapatkan nilai estimasi parameternya akan digunakan metode numerik Newton Raphson. Persamaan (43) dapat ditulis dalam bentuk :

$$mll_t=c(v)+\frac{v+1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{v\sigma_t^2}\right)$$

dengan $c(v)=-\log\left(\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right)+\log\left(\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\log(\pi v)$

$c(v)$ merupakan fungsi v dan tidak bergantung kepada $\boldsymbol{\psi}$. Derivatif dari $c(v)$ yaitu:

$$c_1(v)=\frac{dc(v)}{dv}=\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{v+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{v}{2}\right)+\frac{1}{2v}$$

$$c_2(v)=\frac{d^2c(v)}{dv^2}=-\frac{1}{4}\Psi_2\left(\frac{v+1}{2}\right)+\frac{1}{4}\Psi_2\left(\frac{v}{2}\right)-\frac{1}{2v^2}$$

dengan fungsi Ψ adalah fungsi digamma dan menyatakan derivatif dari fungsi log(gamma). Selanjutnya akan dilakukan penurunan pertama dari mll_t terhadap v dan ψ sebagai berikut :

- $\frac{\partial mll_t}{\partial v}=c_1(v)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)+\frac{v+1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]$

  dengan

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]=\frac{\frac{\partial}{\partial v}\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)}{1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}}=-\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]}$$

  Oleh karena itu,

$$\frac{\partial mll_t}{\partial v}=c_1(v)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)-\frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]} \qquad (42)$$

- $\frac{\partial mll_t}{\partial \psi}=\frac{v+1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left[log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]$

  dengan

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left[log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]=\frac{\frac{\partial}{\partial\psi}\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)}{1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}}=\frac{\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi}\sigma_t^2-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi}\varepsilon_t^2}{v(\sigma_t^2)^2+\sigma_t^2\varepsilon_t^2}$$

  Sehingga,

$$\frac{\partial mll_t}{\partial\psi}=\frac{\frac{v+1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi}\sigma_t^2-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi}\varepsilon_t^2\right)}{v(\sigma_t^2)^2+\sigma_t^2\varepsilon_t^2} \qquad (43)$$

  maka diperoleh

$$\nabla mll_t=\begin{bmatrix}\frac{\partial mll_t}{\partial v}\\ \frac{\partial mll_t}{\partial\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1(v)+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)-\frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2)}\\ \frac{\frac{v+1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi}\sigma_t^2-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi}\varepsilon_t^2\right)}{v(\sigma_t^2)^2+\sigma_t^2\varepsilon_t^2}\end{bmatrix}$$

  yang akan bernilai optimum jika $\nabla mll_t=0$.

Selanjutnya dikonstruksikan matriks Hessian dari mll_t yang terdiri dari 3 blok, $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}$ merupakan sebuah skalar, $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial v}$ merupakan vektor kolom $m\times 1$, dan $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial\psi'}$ merupakan matriks $m\times m$. Ketiga elemen matriks Hessian tersebut dihitung dengan langkah berikut :

- Derivatif dari $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}=c_2(v)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]}\right]$$

  dengan

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\left(1+\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v}\right)\right]=-\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]}$$

  dan

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v+1}{2}\frac{\varepsilon_t^2}{(v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2])}\right]=\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v+1}{2v}\right]\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2}+\frac{v+1}{2v}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2}\right]$$

$$=-\frac{(v^2+2v)\varepsilon_t^2\sigma_t^2+\varepsilon_t^4}{2v^2[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]^2}$$

  Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}=c_2(v)-\frac{\varepsilon_t^2}{v[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]}-\frac{(v^2+2v)\varepsilon_t^2\sigma_t^2+\varepsilon_t^4}{2v^2[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]^2}$$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2}=c_2(v)-\frac{(2v+1)\varepsilon_t^4+(3v^2+2v)\varepsilon_t^2\sigma_t^2}{2v^2[\sigma_t^2 v+\varepsilon_t^2]^2} \qquad (44)$$

- Derivatif dari $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial\psi'}$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial\psi'}=\frac{\partial mll_t}{\partial\psi'}\left[\frac{v+1}{2}\frac{\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi}\sigma_t^2-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi}\varepsilon_t^2}{v(\sigma_t^2)^2+\sigma_t^2\varepsilon_t^2}\right] \qquad (45)$$

Karena persamaan (45) terlalu rumit maka dapat disederhanakan dengan pemisalan berikut :

$$\mathcal{A}=\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi}\sigma_t^2-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi}\varepsilon_t^2, \qquad \mathcal{A}\in\mathbb{R}^{m+1}$$

$$\mathcal{B}=v(\sigma_t^2)^2+\sigma_t^2\varepsilon_t^2 \qquad \mathcal{B}\in\mathbb{R}$$

dengan $\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\psi'}$ adalah matriks $m\times m$ dan $\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\psi'}$ adalah vektor $1\times m$. Kedua bentuk tersebut akan diderivatifkan secara terpisah sebagai berikut :

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\psi'}=\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi'}+\sigma_t^2\frac{\partial^2\varepsilon_t^2}{\partial\psi\partial\psi'}-\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi}\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi'}-\varepsilon_t^2\frac{\partial^2\sigma_t^2}{\partial\psi\partial\psi'}$$

Kemudian akan dihitung $\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\psi'}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\psi'}=v\frac{\partial(\sigma_t^2)^2}{\partial\psi'}+\varepsilon_t^2\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\psi'}+\sigma_t^2\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\psi'} \qquad (46)$$

Pada pemisalan bentuk persamaan (46), maka diperoleh :

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi}=\frac{v+1}{2}\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$$

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial\psi'}=\frac{v+1}{2}\frac{\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\psi'}-\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\psi'}}{\mathcal{B}^2} \qquad (47)$$

- Derivatif dari $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial v}$

Untuk menghitung $\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial v}$ dapat memanfaatkan persamaan (45) termasuk dalam hal pemisalan, sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\frac{\partial mll_t}{\partial\psi}=\frac{(v+1)}{\mathcal{B}}\frac{\mathcal{A}}{2}\Rightarrow\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi}=\frac{\mathcal{A}}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v+1}{\mathcal{B}}\right]$$

karena

$$\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}[v(\sigma_t^2)^2+\sigma_t^2\varepsilon_t^2]=(\sigma_t^2)^2$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v+1}{\mathcal{B}}\right]=\frac{\mathcal{B}-(v+1)\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial v}}{\mathcal{B}^2}=\frac{\mathcal{B}-(v+1)(\sigma_t^2)^2}{\mathcal{B}^2}$$

akhirnya diperoleh :

$$\frac{\partial^2 mll_t}{\partial\psi\partial v}=\frac{\mathcal{A}}{2}\frac{\mathcal{B}-(v+1)(\sigma_t^2)^2}{\mathcal{B}^2}=\frac{\mathcal{A}}{2\mathcal{B}^2}(\sigma_t^2\varepsilon_t^2-(\sigma_t^2)^2) \qquad (48)$$

Karena bentuk derivatif pertama dan derivatif kedua persamaan (48) tidak *closed form*, maka untuk memperoleh parameter GARCH-t menggunakan metode iterasi Newton Raphson yang diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{t+1} \\ \hat{\psi}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial mll_t}{\partial v} \\ \frac{\partial mll_t}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 mll_t}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 mll_t}{\partial v \partial \psi} \\ \frac{\partial^2 mll_t}{\partial v \partial \psi} & \frac{\partial^2 mll_t}{\partial \psi \partial \psi'} \end{bmatrix}^{-1}$$

Proses iterasi akan berhenti jika $iterasi_{t+1} \approx iterasi_t$.

2. Estimasi Parameter Copula

Berdasarkan fungsi log *likelihood* pada persamaan (38), maka untuk dekomposisi C-Vine 3 dimensi fungsi log *likelihood* diberikan sebagai berikut.

$$l(x,\Theta) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3-j} \sum_{t=1}^{T} \log(c_{j,j+1|1,\dots,j-1} \\ (F(x_{j,t}|x_{1,t},\dots,x_{j-1,t}), F(x_{j'+i',t}|x_{1,t},\dots,x_{j'-1,t}))) \quad (49)$$

Sedangkan dekomposisi D-Vine 3 dimensi, fungsi log *likelihood* copula diberikan sebagai berikut:

$$l(x,\Theta) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3-j} \sum_{t=1}^{T} \log(c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1} \\ (F(x_{i,t}|x_{i+1,t},\dots,x_{i+j-1,t}), F(x_{i+j,t}|x_{j+1,t},\dots,x_{i+j-1,t}))) \quad (50)$$

Pada bagian ini akan dilakukan estimasi dengan maksimum *likelihood* untuk dekomposisi C-Vine 3 dimensi.

Data observasi (data asli) : $\{(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}), t = 1, \dots, T\}$

Parameter copula : $\Theta = (\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23|1})$

a. Mengestimasi γ_{12} dari $(u_{1,t}, u_{2,t})$ dan γ_{13} dari $(u_{1,t}, u_{3,t})$
b. Menentukan data semu
$$\hat{u}_{2|1,t} = F(x_{2,t}|x_{1,t}) = h(x_{2,t}x_{1,t}; \gamma_{12})$$
$$\hat{u}_{3|1,t} = F(x_{3,t}|x_{1,t}) = h(x_{3,t}x_{1,t}; \gamma_{13})$$
c. Mengestimasi $\gamma_{23|1}$ dari $\{(\hat{u}_{2|1,t}, \hat{u}_{3|1,t}), t = 1, \dots, T\}$

Sehingga, fungsi log *likelihood* C-Vine dari persamaan (49) dapat direduksi menjadi

$$l(x,\Theta) = \sum_{t=1}^{T} [\log c_{12}(u_{1,t}, u_{2,t}; \gamma_{12}) + \\ \log c_{13}(u_{1,t}, u_{3,t}; \gamma_{13}) + \log c_{23|1}(\hat{u}_{2|1,t}, \hat{u}_{3|1,t}; \gamma_{23|1})] \quad (51)$$

Estimasi untuk D-Vine dilakukan dengan cara analog sehingga diperoleh fungsi log *likelihood* berikut

$$l(x,\Theta) = \sum_{t=1}^{T} [\log c_{12}(u_{1,t}, u_{2,t}; \gamma_{12}) \\ + \log c_{23}(u_{2,t}, u_{3,t}; \gamma_{23}) + \log c_{13|2}(\hat{u}_{1|2,t}, \hat{u}_{3|2,t}; \gamma_{13|2})] \quad (52)$$

D. Prosedur Perhitungan *Value at Risk* (VaR) dengan Metode GARCH-Vine Copula

Langkah-langkah perhitungan VaR dengan metode GARCH-Vine Copula dapat dilakukan sebagai berikut.

1. Karakteristik Return Saham

Sebelum dilakukan estimasi VaR, terlebih dahulu dilakukan analisa terhadap masing-masing return saham. Analisa deskriptif yang dilakukan meliputi mengetahui adanya indikasi heterskedastisitas, analisis statustik deskriptif untuk mengetahui karakteristik data return, dan pengujian normalitas pada masing-masing saham.

a) Heteroskedastisitas

Identifikasi adanya heteroskedastisitas dapat dilihat dari plot *time series*. Apabila dari plot tersebut nilai return saham menunjukkan adanya variabilitas yang relatif tinggi pada suatu waktu dan terjadi kecendrungan yang sama dalam kurun waktu selanjutnya, maka hal tersebut mengindikasikan adanya heteroskedastisitas pada return saham. Selain berdasarkan plot *time series*, indikasi adanya heteroskedastisitas dapat dilihat pula dari nilai kurtosis yang lebih dari tiga.

b) Normalitas

Untuk mengetahui distribusi dari return saham dapat dilakukan pengujian normalitas menggunakan uji kolmogorov smirnov menggunakan persamaan (8). Selain menggunakan pengujian normalitas, indikasi return berdistribusi normal ditunjukkan dengan menggunakan skewness dan kurtosis retun. Indikasi return berdistribusi normal ditunjukkan dengan skewness bernilai 0 dan kurtosis bernilai 3.

2. Pembentukan Model Marginal dengan GARCH

Sebelum membentuk model Vine Copula, dilakukan pembentukan model marginal dengan pendekatan model *time series* GARCH. Pemodelan GARCH dimulai dengan menentukan terlebih dahulu model ARIMA yang sesuai. Berikut ini merupakan langkah-langkah pembentukan model marginal dengan GARCH.

a) Pengujian kestasioneran data

Dalam menganalisis data *time series* langkah pertama yang dilakukan adalah memeriksa kestasioneran data. Pemeriksaan kestasioneran ini dapat dilakukan dengan menggunakan plot *time series* serta plot ACF dan PACF. Apabila data tidak stasioner, maka dapat dilakukan *differencing* untuk membuat menjadi stasioner.

b) Pemodelan ARIMA

Langkah selanjutnya setelah return dinyatakan stasioner adalah identifikasi model ARIMA. Tahap ini dilakukan untuk mencari model yang sesuai berdasarkan data return saham. Pembentukan model ARIMA dilakukan dengan menentukan lag yang signifikan pada PACF dan ACF. Plot ACF digunakan untuk memperkirakan ordo-*q*. Sedangkan plot PCF digunakan untuk memperkirakan ordo-*p*.

Dalam pembentukan model ARIMA, terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi yaitu residual bersifat *white noise*. Uji untuk mengetahui residual yang bersifat *white noise* menggunakan uji Ljung Box dengan persamaan (15). Setelah disimpulkan residual return telah memenuhi asumsi *white noise*, kemudian dilakukan pemilihan model terbaik dengan menggunakan kriteria AIC sesuai persamaan (18).

c) Uji Efek ARCH

Setelah diperoleh model ARIMA untuk setiap saham, langkah selanjutnya yang dilakukan sebelum melakukan pemodelan GARCH adalah pemeriksaan terhadap residual kuadrat dari model ARIMA yang digunakan untuk menunjukkan ada atau tidaknya heteroskedastisitas. Pemeriksaan ini dilakukan dengan menggunakan uji Ljung-Box dan uji Lagrange Multiplier (LM).

d) Pemodelan GARCH

Pada penelitian ini model GARCH (1,1) digunakan untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas dengan residual yang berdistribusi *Student-t* (GARCH-t). Setelah model GARCH terbentuk, dilakukan uji diagnostik untuk menunjukkan model yang digunakan sesuai atau sudah cukup baik. Uji diagnostik dilakukan dengan menguji kembali apakah masih terdapat efek ARCH pada residual model GARCH yang terbentuk.

3. Pemodelan Vine Copula

Setelah memodelkan masing-masing return saham secara independen dan telah mengestimasi parameternya, untuk memodelkan dengan Vine Copula langkah selanjutnya adalah menyelidiki kebergantungan diantara ketiga pasangan variabel dengan menggunakan copula. Setelah ketiga return saham memiliki kebergantungan, maka dapat dilanjutkan dengan menentuan parameter Vine Copula.

a) Uji Dependensi

Pembentukan model Vine Copula memerlukan adanya dependensi antar variabel. Uji dependensi ini dilakukan dengan uji Kendall Tau dengan menggunakan persamaan (21) dan (22).

b) Estimasi Parameter Vine Copula

Setelah dinyatakan bahwa terdapat ketergantungan antar saham-saham, kemudian akan dilakukan estimasi parameter untuk masing-masing copula dengan metode *maximum likelihood*. Estimasi parameter dilakukan dengan prinsip pasangan copula bivariat pada setiap level.

4. Perhitungan *Value at Risk* (VaR) dengan GARCH-Vine Copula

Untuk mengestimasi VaR portofolio, perlu disimulasikan data return dari dekomposisi pasangan copula. Diasumsikan margin berdistribusi uniform. Kemudian membangkitkan bilangan random sesuai dengan parameter Vine Copula. Hasil simulasi Vine Copula yang berdistribusi uniform tersebut kemudian ditransformasi menggunakan invers CDF masing-masing marginal sehingga diperoleh kembali data residual z_{it}. Residual ini kemudian dikalikan dengan volatilitas (σ_{it}) dari model GARCH-t (1,1) dan ditambah dengan μ_i dari model mean untuk $i = 1,2,..,$d. Akhirnya, proses ini menghasilkan data return (r_{it}) hasil simulasi Vine Copula untuk masing-masing aset dalam portofolio.

Tahap selanjutnya adalah mengestimasi VaR portofolio menggunakan data return hasil simulasi tersebut. Portofolio yang terdiri dari d aset dengan bobot masing-masing aset adalah $w_1, w_2, \dots, w_d$ memiliki return pada waktu ke-t yang dapat dihitung dengan pendekatan berikut :

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^{d} r_{it} w_i \qquad (53)$$

dengan r_{it} adalah return aset ke-i pada waktu ke-t dan w_i adalah bobot setiap alokasi dana untuk aset tunggal ke-i. Pemilihan bobot pada penelitian ini digunakan bobot yang sama yaitu sebesar $\frac{1}{n}$ untuk setiap aset saham. Dengan demikian, estimasi VaR portofolio dapat dilakukan.

5. *Backtesting* Model

Setelah model Vine Copula terbentuk dilakukan *Backtesting* untuk mengetahui keakuratan model pada data. Metode *Backtesting* yang digunakan adalah metode *Kupiec Backtesting* dengan pengujian menggunakan persamaan (26).

Berdasarkan langkah-langkah diatas maka diagram alir perhitungan *Value at Risk* menggunakan metode GARCH-Vine Copula pada Portofolio adalah sebagai berikut:

Gambar 3. Diagram Alir Perhitungan *Value at Risk* menggunakan metode GARCH-Vine Copula

Pada Gambar 3, secara umum prosedur pehitungan *Value at Risk* menggunakan metode GARCH-Vine Copula terdiri dari tiga tahap. Tahap I merupakan tahap pembentukan model marginal. Tahap II merupakan tahap penggabungan distribusi marginal menjadi distribusi bersama dengan Vine Copula (pemodelan Vine Copula). Tahap III merupakan perhitungan VaR serta validasi model.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Langkah-langkah dalam menentukan estimasi Value at Risk (VaR) dengan menggunakan metode GARCH-Vine Copula adalah sebagai berikut :

1. Menghitung return harga saham dengan menggunakan rumus return
2. Mendeskripsikan dan mengidentifikasi karakteristik data.
3. Pemodelan Marginal dengan GARCH
   a. Melakukan pengujian kestasioneran data. Setelah data dinyatakan stasioner terhadap mean dan varians, dapat dilanjutkan dengan menentukan ordo model ARIMA menggunakan plot ACF dan PACF, kemudian menentukan model ARIMA terbaik dengan kriteria AIC.
   b. Melakukan pengujian efek ARCH terhadap residual ARIMA untuk mengetahui ada tidaknya heteroskedastisitas.
   c. Membentuk model marginal GARCH menggunakan metode maksimum *likelihood* untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas kemudian menggunakan distribusi *Student*-t pada residual GARCH dan mengidentifikasi struktur kebergantungan model marginal.
4. Membentuk distribusi gabungan dari model marginal ketiga saham dengan Vine Copula.
   a. Menentukan dekomposisi Vine Copula yang digunakan.
   b. Mengestimasi parameter Vine Copula dengan metode IFM
      - Mengestimasi parameter model marginal (pada hakikatnya, langkah ini telah dilakukan pada poin c)
      - Mengestimasi parameter pasangan-pasangan copula bivariat.
   c. Memilih copula terbaik berdasarkan kriteria AIC.
5. Melakukan estimasi VaR berbasis copula.
   a. Membangkitkan bilangan random $(u_1 u_2, \dots, u_d)$ dari Vine Copula berdasarkan parameter copula yang telah diestimasi pada langkah sebelumnya.
   b. Menginvers CDF masing-masing marginal terhadap $(u_1, u_2, \dots, u_d)$ kemudian mengalikan dengan volatilitas model GARCH-t (1,1) ditambah μ sehingga diperoleh return multivariat $(r_1, r_2, \dots, r_d)$.
   c. Menghitung return portofolio.
   d. Mengurutkan data return portofolio dalam

urutan naik, kemudian menghitung kuantil ke-α.

e. Mengulangi langkah a-d sebanyak

f. M kali. $VaR_{\alpha}(r_p)$ adalah rata-rata M estimasi VaR harian portofolio dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$.

6. Melakukan validasi model copula dengan *backtesting*.
7. Membuat kesimpulan hasil analisis VaR berdasarkan pemilihan model copula terbaik.

Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah dalam pemodelan Vine Copula dapat digunakan dekomposisi lain dari C-Vine dan D-Vine Copula. Selain itu, dapat dilakukan pemilihan bobot yang menghasilkan estimasi VaR minimum dengan metode ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bollerslev, T., Engle, R., & Nelson, D. (1994). ARCH models. *Econometrics,* 31, 307-327.

Chapra, S. C., & Canale, R. (1998). *Numerical methods*. New York: Publishing Corporation.

Dharmawan, K. (2014). Estimasi nilai value at risk portofolio menggunaan metode t-copula. *Jurnal Matematika, Saint, dan Teknologi*.

Geidosch, M., & Fischer, M. (2016). Application of vine copula to credit portfolio risk modelling. *Journal of Risk and Financial Management*.

Halim, A. (2005). *Analisis Investasi*. *(edisi kedua)*. Jakarta: Salemba Empat.

Hanke, J. E. & Wichern, D. W. (2005). *Business forecasting*. *(8th ed.)*. New Jersey: Pearso Prentice Hall.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concept*. London: Chapman and Hall.

Joe, H., & Xu, J. J. (1996). The estimation method of inference for multivariate models. *Technical Report 166*.

Jorion, P. (2002). *Value at risk : The new benchmark for managing financial risk. (2nd ed.)*. New York: Macmillan.

Liu, J. (2011). *Extreme value theory and copla theory : A risk management application with energy futures*. Victoria: University of Victoria.

Matteis, R. D. (2001). Fitting copulas to data. *Diploma Thesis*. University of Zurich.

Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. (2012). I*ntroduction to linear regression analysis*. *(5th ed.)*. New Jersey: John Wilwy & Sons.

Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. *(2nd ed.)*. New York: Springer.

Rao, P. (1997). *Variance components estimation, mixed models methologies and applications*. New York: Chapman and Hall.

Renggani, P. Pintari, H. O., & Subekti, R. (2017). Estimasi value at risk (VaR) pada portofolio dengan metode elliptical copula. *Prosiding, Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika yang diselenggarakan oleh FMIPA UNY, tanggal 11 November 2017*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Siegel, S. (1990). *Statistik nonparametrik untuk ilmu-ilmu sosial*. (Terjemahan Zanzawi Suyuti dan Landung Simatupang). Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Suharto, A. A., Dharmawan, K., & Sumarjaya, I. W. (2017). Estimasi nilai VaR portofolio menggunakan fungsi copula archimedean . *E-Jurnal Matematika*, 6 (1), 15-21.

Tandelilin, E. (2007). *Analisis invstasi dan manajemen portofolio*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series*. *(2nd ed.)*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Wei, W. W. (2006). *Time series analysis : Univariate and multivariate methods*. *(2th ed.)*. New York: Addison Weasley.