OPTIMASI PRODUKSI AIR MINERAL KEMASAN MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN NONLINEAR DENGAN MENGAPLIKASIKAN ALGORITMA *BRANCH AND BOUND* PADA PT. MITRA TIRTA BUWANA

OPTIMIZATION OF PACKAGING MINERAL WATER PRODUCTION USING NONLINEAR PROGRAMMING BY APPLYING BRANCH AND BOUND ALGORITHM IN PT. MITRA TIRTA BUWANA

Oleh : Della Ayu Sagita[1)], Eminugroho Ratna Sari[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
della.ayu@student.uny.ac.id[1)], eminugroho@uny.ac.id[2)]

Abstrak

Optimasi merupakan proses penyelesaian masalah yang bertujuan untuk menemukan kondisi terbaik yang mampu memberikan nilai maksimum atau minimum. Salah satu masalah optimasi adalah optimasi produksi air mineral kemasan di PT. Mitra Tirta Buwana yang ingin memaksimalkan hasil penjualan. Produk yang digunakan sebagai variabel adalah produk cup 240 ml, botol 600 ml dan botol 1500 ml. Pendekatan model nonlinear terhadap data dilakukan menggunakan fungsi polinomial dua, polinomial tiga, dan polinomial empat. Berdasarkan identifikasi galat dari setiap pendekatan model tersebut diperoleh bahwa pendekatan terbaik adalah pendekatan fungsi polinomial dua. Kemudian, pendekatan model nonlinear polinomial dua dilinearisasi menggunakan syarat *Karush Kuhn Tucker(KKT).* Setelah diperoleh model linear kemudian diselesaikan dengan mengaplikasikan algoritma *branch and bound.* Hasil penelitian optimasi produksi air mineral kemasan sebagai solusi optimum adalah 1656 karton cup 240 ml, 70 karton botol 600 ml, dan 9 karton botol 1500 ml sehingga diperoleh hasil penjualan optimum adalah Rp 24.199.070,-.

Kata kunci : optimasi, air mineral, pemrograman nonlinear, syarat *Karush Kuhn Tucker,* algoritma *branch and bound.*

A. PENDAHULUAN

Riset operasi, dalam arti luas dapat diartikan sebagai penerapan metode-metode, teknik-teknik dan alat-alat terhadap masalah-masalah yang menyangkut operasi-operasi dari sistem-sistem, sedemikian rupa sehingga memberikan penyelesaian optimal (Mulyono, 2004: 2). Saat ini terdapat banyak teknik yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah riset operasi. Teknik-teknik ini dibedakan berdasarkan jenis masalah yang ada pada kasus riset operasi. Namun dalam optimasi suatu keuntungan, jumlah produksi, atau hal-hal yang terkait dengan sistem produksi dapat dikategorikan ke dalam masalah pemrograman.

Masalah pemrograman dibedakan menjadi dua jenis berdasarkan bentuk model dalam kasus optimasi yaitu pemrograman linear dan pemrograman nonlinear. Menurut Joko Luknanto (2000: 1), suatu permasalahan optimasi disebut nonlinear jika fungsi tujuan dan kendalanya mempunyai bentuk nonlinear pada salah satu atau keduanya. Seiring berjalannya waktu pemrograman nonlinear sering digunakan pada penyelesaian masalah optimasi. Pada dasarnya penyelesaian suatu masalah optimasi menggunakan pemrograman nonlinear adalah dengan melakukan pendekatan terhadap data pada suatu kasus. Pendekatan yang dilakukan ini adalah pendekatan terbaik pada fungsi tujuan yang dibentuk dari data yang telah diperoleh.

Pemrograman nonlinear memiliki beberapa metode penyelesaian diantaranya adalah pemrograman kuadratik, pemrograman *separable*. *lagrange multiplier*, pendekatan kondisi *Karush Kuhn Tucker*. Penggunaan metode penyelesaian ini tergantung bentuk dan kondisi dari model pada kasus optimasi itu sendiri. Pemrograman nonlinear dengan fungsi tujuan pada model yang merupakan fungsi kuadratik dapat diselesaikan secara langsung dengan aplikasi WinQSB atau menggunakan proses linearisasi menggunakan syarat *Karush Kuhn Tucker(KKT)*. Sedangkan pada penyelesaian pemrograman nonlinear yang memiliki fungsi tujuan berupa polinomial lebih dari dua dapat secara langsung diselesaikan menggunakan beberapa metode diantaranya seperti metode lagrange dan metode pemrograman *separable*.

Pure Integer Nonlinear Programming merupakan permasalahan optimasi nonlinear dimana semua variabel keputusannya harus bilangan bulat (Hillier, 2001: 474). Pemrograman bilangan bulat pada umumnya lebih sulit diselesaikan dari pada pemrograman linear, maka terkadang terdapat kecenderungan untuk langsung membulatkan solusi bilangan real. Namun, hal itu tidak menjamin bahwa solusi hasil pembulatan adalah solusi optimal bilangan bulat. Mengingat pada kasus optimasi produksi air mineral kemasan di PT. Mitra Tirta Buwana, satuan setiap produk adalah per karton sehingga sangat tidak mungkin jika solusi optimal tidak dinyatakan ke dalam bilangan bulat. *Branch and Bound* adalah salah satu metode yang telah digunakan dengan baik untuk menyelesaikan berbagai macam masalah dalam bidang riset operasi dan masalah pemrograman bilangan bulat (Hillier, 2001: 501).

Berdasarkan data Departemen Kesehatan (2006), Sebagai kebutuhan dasar dalam kehidupan, air selalu diperlukan manusia untuk digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Manusia menggunakan air untuk keperluan sehari-hari seperti untuk minum, mandi, cuci, dan sebagainya.

PT. Mitra Tirta Buwana merupakan salah satu perusahaan air minum yang memproduksi air minum kemasan dengan beberapa jenis produk. Jenis produk tersebut adalah air minum cup 240 ml, botol 600 ml, botol 1500 ml, dan galon 19 liter.

Pada penelitian ini produk galon diabaikan karena produk galon memiliki dua sistem penjualan yaitu menjual produk baru dan isi ulang. PT. Mitra Tirta Buwana ini belum menerapkan sumber daya yang optimal. Hal ini dapat di lihat dari terjadinya permintaan yang tinggi dibandingkan jumlah produk yang diproduksi oleh pabrik. Hal tersebut mengakibatkan perusahaan mengalami ketidakstabilan produksi sehingga hasil penjualan yang diperoleh tidak maksimum. Oleh karena itu penelitian ini bertujuan untuk memaksimalkan hasil penjualan dengan memproduksi jumlah kuantitas produksi yang tepat dari semua produk.

Terdapat beberapa penelitian yang telah membahas metode pemrograman. Pada penelitian Khoerunisa dan Liebeblito (2017) membahas mengenai kombinasi persyaratan *Karush Kuhn Tucker* dan metode *branch and bound* pada pemrograman kuadratik konveks tanpa menggunakan studi kasus. Pada penelitian Hariadi (2009) membahas mengenai pencarian solusi pemrogrman nonlinear menggunakan algoritma *branch and bound* dengan grafik trayektori dalam penyelesaiannya. Sedangkan, penelitian yang telah membahas mengenai *branch and bound* diantaranya penelitian Triyanto, Adianto, & Susanty (2015) membahas mengenai pengaplikasian algoritma *branch and bound* pada masalah rute distribusi gas LPG 3 kg. Selain itu, pada penelitian Sauddin dan Sumarni (2013) membahas mengenai *integer programming* dengan pendekatan metode *branch and cut*. Sedangkan pada penelitian ini dilakukan penyelesaian pemrograman nonlinear dengan mengidentifikasi fungsi objektif terbaik dan penyelesaian algoritma menggunakan metode simpleks.

Tujuan penelitian ini adalah membentuk model matematika nonlinear untuk pengoptimalan jumlah produksi air mineral kemasan PT. Mitra Tirta Buwana, menyelesaikan model nonlinear yang telah dilinearisasi dengan bantuan algoritma *branch and bound*, memperoleh hasil perhitungan solusi optimum pada hasil penjualan air mineral kemasan. Adapun manfaat penelitian ini adalah memberikan saran jumlah produksi yang optimal untuk produksi air mineral kemasan di PT. Mitra Tirta Buwana dan dapat dijadikan acuan untuk meningkatkan produksi air mineral kemasan di PT. Mitra Tirta Buwana.

B. KAJIAN PUSTAKA

Berikut ini akan dijelaskan teori tentang optimasi, pemrograman nonlinear, dan algoritma *branch and bound*.

1. Optimasi

Menurut Rao (2009: 1), optimasi merupakan proses untuk menemukan kondisi yang mampu memberikan nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi. Sedangkan menurut Berlianty & Arifin (2010: 9), optimasi adalah proses pencarian satu atau lebih penyelesaian yang berhubungan dengan nilai-nilai dari satu atau lebih fungsi objektif pada suatu masalah sehingga diperoleh satu nilai optimal. Berdasarkan beberapa definisi mengenai optimasi sehingga dapat disimpulkan bahwa optimasi merupakan suatu proses penyelesaian masalah yang bertujuan untuk mendapatkan kondisi terbaik pada keadaan maksimasi atau minimasi.

2. Pemrograman Nonlinear

Menurut Luknanto (2000: 1), suatu permasalahan optimasi disebut nonlinear jika fungsi tujuan dan kendalanya mempunyai bentuk nonlinear pada salah satu atau keduanya. Masalah pemrograman nonlinear didefinisikan sebagai berikut:

Memaksimumkan/meminimumkan

$$\mathrm{Z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n) \quad \textbf{(1)}$$

dengan kendala

$$\begin{gathered} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)(\leq, =, \geq) b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)(\leq, =, \geq) b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)(\leq, =, \geq) b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{gathered} \quad \textbf{(2)}$$

a. Pemrograman Kuadratik

Menurut Peressini, dkk (1988: 117), pemrograman kuadratik merupakan pendekatan penyelesaian permasalahan optimasi nonlinear dengan kendalanya berupa fungsi linear dan fungsi tujuannya berupa fungsi nonlinear. Bentuk umum dari masalah pemrograman kuadratik adalah sebagai berikut:

Memaksimumkan

$$f(X) = CX + \tfrac{1}{2} X^t Q X + d \quad \textbf{(3)}$$

dengan kendala

$$AX \leq B \quad \textbf{(4)}$$

$$X \geq 0 \quad \textbf{(5)}$$

Menurut Rao (2009: 781), suatu fungsi $f(x)$ dikatakan sebagai fungsi konkaf jika matriks Hessian dari $f(x)$ merupakan *negative semi definite*.Pada persamaan (3) variabel Q merupakan matriks Hessian yang didefinisikan sebagai berikut :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

b. *Karush Kuhn Tucker (KKT)*

Permasalahan pada pemrograman kuadratik diubah menjadi bentuk linear melalui syarat *Karush Kuhn Tucker*. Syarat kondisi *Karush*

Kuhn Tucker untuk masalah maksimasi yang ditunjukkan dengan Teorema 1 berikut (Winston, 2004: 673) :

Teorema 1 (Kondisi *Karush Kuhn Tucker*) :

Dimisalkan persamaan $f(x)$ adalah masalah maksimasi. Jika $x_j^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, merupakan solusi optimal untuk persamaan f(x), maka $x_j^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ harus memenuhi kendala pada persamaan $f(x)$ dan harus ada pengali yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, dan variabel slack yang dinyatakan oleh $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ yang memenuhi :

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} + s_j = 0 \quad (j = 1,2,\dots,n) \qquad \textbf{(6)}$$

$$\lambda_i(g_i(x^*) - b_i) = 0 \quad (i = 1,2,\dots,m) \qquad \textbf{(7)}$$

$$x_j^* \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,n) \qquad \textbf{(8)}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\dots,m) \qquad \textbf{(9)}$$

$$s_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n) \qquad \textbf{(10)}$$

c. Syarat Keoptimuman

Syarat cukup keoptimalan digunakan untuk menentukan apakah titik optimal yang didapatkan dari syarat perlu keoptimalan merupakan titik minimum atau titik maksimum.

Sifat 1 *Complementary Slackness* pada *Pemrograman Kuadratik*

(Winston, 2004: 687)

1) e_j dan s_j pada kondisi Karush Kuhn Tucker dan x_j tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.

2) Variabel surplus (excess) ataupun slack untuk kendala ke-i dan λ_i tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.

3. Algoritma *Branch and Bound*

Menurut Hiller dan Lieberman (2001: 515), metode *branch and bound* dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

i. Pencabangan

Pencabangan diawali dengan memperoleh solusi optimal dari suatu masalah optimasi. Kemudian dipilih variabel yang bukan merupakan bilangan bilangan bulat. Variabel yang dipilih adalah variabel yang memiliki nilai bukan merupakan bilangan bulat dalam solusi optimal yaitu x_j. Kemudian dilakukan pencabangan dengan menentukan batas bawah dari variabel x_j yaitu x_j^*. Pencabangan dari suatu submasalah mengakibatkan diperolehnya dua submasalah yang baru dimana masing-masing submasalah yang baru ditambahkan batasan bilangan bulat pada kendala yaitu $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ dan $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$

ii. Pembulatan

Setiap submasalah yang telah ditambahkan kendala kemudian diselesaikan dengan metode simpleks atau dual simpleks sehingga diperoleh solusi optimal dengan nilai variabel yang baru.

iii. Fathoming

Setiap submasalah yang baru memberikan solusi optimal pada fungsi tujuan yang baru pula, dengan Z^* adalah solusi optimal pertama pada submasalah sebelumnya. Pada setiap submasalah yang baru digunakan tiga ketentuan untuk menghentikan suatu subproblem yaitu sebagai berikut :

a. Jika variabel yang diperoleh merupakan bilangan bulat namun solusi optimal kurang dari Z^*,
b. Jika didapatkan solusi infisibel,
c. Jika didapatkan solusi fisibel bilangan bulat, maka percabangan dihentikan. Solusi yang didapatkan tersebut merupakan calon solusi optimum.

C. METODE PENELITIAN

1. Waktu dan Tempat

Penelitian ini telah dilaksanakan di PT. Mitra Tirta Buwana yang berlokasi di Sambilegi Baru, Jl Waru No.74 Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta 55282. Penelitian dilaksanakan pada 22 Januari 2018.

2. Metode Pengumpulan Data

Penelitian Kepustakaan

Pada penelitian ini menggunakan sumber dari jurnal, buku, serta karya tulis sebagai bahan pertimbangan dalam penulisan tugas akhir.

Penelitian Lapangan

Penelitian lapangan yaitu penelitian yang dilakukan dengan terjun langsung ke lapangan untuk memperoleh data melalui pengamatan langsung pada objek yang akan diteliti untuk memperoleh data yang dibutuhkan.

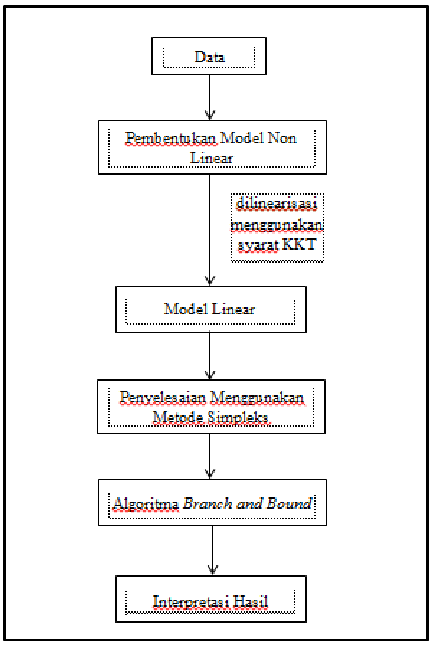
3. Pengambilan Data

Pengambilan data dilakukan dengan wawancara yaitu pengumpulan data dengan mengajukan pertanyaan secara langsung kepada responden. Serta menggunakan buku-buku terkait, jurnal-jurnal yang bersesuaian serta karya tulis sebagai bahan pertimbangan dalam penulisan tugas akhir

4. Pengolahan Data

Data yang diperoleh akan diolah dengan pedoman kajian pustaka. Adapun kajian pustaka yang akan digunakan dalam menganalisis masalah berpedoman pada metode pemrograman non linear. Metode nonlinear kemudian ditranformasi ke pemograman linear. Penyelesaian yang diharapkan berupa bilangan bulat. Untuk itu digunakan algoritma *branch and bound.*

5. Analisa Data



Gambar 1. Diagram Alir Penelitian

D. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan, berikut diberikan data jumlah produksi, data jumlah penjualan, dan data hasil penjualan pada tiga produk air mineral kemasan selama 18 bulan sejak tahun 2016 yang dijelaskan pada Tabel 1 untuk produk cup 240 ml, Tabel 2 untuk produk botol 600 ml, Tabel 3 untuk produk botol 1500 ml sebagai berikut :

Tabel 1. Data Jumlah Produksi, Jumlah Penjualan, dan Hasil Penjualan Cup 240 ml

No	Bulan	Cup 240 ml (C)		
		JPP (ratusan karton)	JPT (ratusan karton)	HP (ratusan rupiah)
1	Jan '16	7.80	7.18	136420
2	Feb '16	11.28	10.58	201020
3	Mar '16	18.12	17.50	332500
4	Apr '16	21.76	21.19	402610
5	Mei '16	14.12	12.36	234840
6	Jun '16	22.00	20.54	390260
7	Jul '16	21.64	21.12	401280
8	Agust'16	18.40	18.33	348270
9	Sept '16	16.00	15.26	289940
10	Okt '16	15.00	15.06	286140
11	Nov '16	11.30	11.95	227050
12	Des '16	13.00	13.32	253080
13	Jan '17	8.10	8.02	152380
14	Feb '17	12.00	11.12	211280
15	Mar '17	22.00	2.13	414770
16	Apr '17	13.20	12.67	240730
17	Mei '17	13.54	12.71	241490
18	Jun '17	21.50	19.98	379620

Tabel 2. Data Jumlah Produksi, Jumlah Penjualan, dan Hasil Penjualan Botol 600 ml

No	Bulan	Botol 600 ml (B6)		
		JPP (ratusan karton)	JPT (ratusan karton)	HP (ratusan rupiah)
1	Jan '16	4.37	4.82	159060
2	Feb '16	5.24	5.87	193710
3	Mar '16	6.59	7.18	236940
4	Apr '16	8.33	8.65	285450
5	Mei '16	5.23	5.87	193710
6	Jun '16	6.28	6.74	222420
7	Jul '16	1.67	1.52	50160
8	Agust'16	2.16	2.07	68310
9	Sept '16	4.17	4.12	135960
10	Okt '16	2.98	3.27	107910
11	Nov '16	6.04	6.50	214500
12	Des '16	5.63	5.59	184470
13	Jan '17	4.50	4.72	155760
14	Feb '17	5.18	5.00	165000
15	Mar '17	6.69	6.83	225390
16	Apr '17	8.20	8.50	280500
17	Mei '17	5.18	5.27	173910
18	Jun '17	5.92	6.22	205260

Tabel 3. Data Jumlah Produksi, Jumlah Penjualan, dan Hasil Penjualan Botol 600 ml

No	Bulan	Botol 1500 ml(B15)		
		JPP (ratusan karton)	JPT (ratusan karton)	HP (ratusan rupiah)
1	Jan '16	1.76	2.01	64320
2	Feb '16	3.28	2.69	86080
3	Mar '16	3.83	4.02	128640
4	Apr '16	2.96	3.15	100800
5	Mei '16	2.58	2.48	79360
6	Jun '16	2.45	2.50	80000
7	Jul '16	1.66	1.86	59520
8	Agust'16	2.22	2.02	64640
9	Sept '16	2.42	1.99	63680
10	Okt '16	2.23	2.15	68800
11	Nov '16	2.07	2.07	66240
12	Des '16	1.51	1.84	58880
13	Jan '17	2.13	2.01	64320
14	Feb '17	2.86	2.87	91840
15	Mar '17	3.21	2.91	93120
16	Apr '17	2.78	2.68	85760
17	Mei '17	2.87	2.88	92160
18	Jun '17	2.66	2.80	89600

Berikut ini akan dipaparkan langkah penyelesaian optimasi produksi air mineral kemasan menggunakan pemrograman nonlinear dengan mengaplikasikan algoritma *branch and bound* pada PT. Mitra Tirta Buwana.

1. Pembentukan Model Nonlinear

Masalah pemrograman nonlinear merupakan masalah optimasi dengan melakukan pendekatan fungsi nonlinear terhadap data. Pembentukan model pada masalah pemrograman nonlinear menggunakan sistem pemilihan fungsi nonlinear dengan pendekatan terbaik. Fungsi tujuan yang dibentuk dalam masalah ini berupa fungsi polinomial pangkat dua (kuadratik), fungsi polinomial pangkat tiga, dan fungsi polinomial pangkat empat.

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan, berikut diberikan data jumlah produksi, data jumlah penjualan, dan data hasil penjualan pada tiga produk air mineral kemasan selama 18 bulan sejak tahun 2016 sampai tahun 2017 yang dijelaskan pada Tabel 1 untuk produk cup 240 ml, produk botol 600 ml, dan produk botol 1500 ml.

Berikut akan dipaparkan penjelasan mengenai langkah-langkah pembentukan fungsi tujuan polinomial dua, tiga, dan empat dari masing-masing jenis produk dengan menggunakan bantuan *software* Matlab.

a. Fungsi Polinomial Dua

Berikut ditentukan nilai parameter fungsi polinomial dua menggunakan bantuan *software* Matlab maka diperoleh fungsi sebagai berikut :

1) Fungsi Polinomial Dua Produk Cup 240 ml

$$f_2(x_1) = -3x_1^2 + 18372x_1 + 32 \quad \textbf{(11)}$$

2) Fungsi Polinomial Dua Produk Botol 600 ml

$$f_2(x_2) = -101x_2^2 + 32174x_2 - 540 \quad \textbf{(12)}$$

3) Fungsi Polinomial Dua Produk Botol 1500 ml

$$f_2(x_3) = -806x_3^2 + 34487x_3 + 177 \quad \textbf{(13)}$$

Fungsi tujuan dengan polinomial dua dapat dibentuk dengan menjumlahkan fungsi polinomial dari masing-masing produk yaitu cup 240 ml, botol 600 ml, dan botol 1500 ml. Sehingga diperoleh fungsi tujuan polinomial dua sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &f_2(x) = f_2(x_1) + f_2(x_2) + f_2(x_3) \\ &\Leftrightarrow f_2(x) = -3x_1^2 - 101x_2^2 - 806x_3^2 \\ &\quad +18372x_1 + 32174x_2 + 34487x_3 \\ &\quad -331 \end{aligned} \quad \textbf{(14)}$$

b. Fungsi Polinomial Tiga

Berikut ditentukan nilai parameter fungsi polinomial tiga menggunakan bantuan *software* Matlab maka diperoleh fungsi sebagai berikut :

1) Fungsi Polinomial Tiga Produk Cup 240 ml

$$f_3(x_1) = -2x_1^3 + 48x_1^2 + 17973x_1 - 5 \quad \textbf{(15)}$$

2) Fungsi Polinomial Tiga Produk Botol 600 ml

$$f_3(x_2) = 161x_2^3 - 2131x_2^2 + 38121x_2 + 11 \quad \textbf{(16)}$$

3) Fungsi Polinomial Tiga Produk Botol 1500 ml

$$f_3(x_3) = -1760x_3^3 + 9586x_3^2 + 19982x_3 + 28 \quad \textbf{(17)}$$

Fungsi tujuan dengan polinomial tiga dapat dibentuk dengan menjumlahkan fungsi polinomial dari masing-masing produk yaitu cup 240 ml, botol 600 ml, dan botol 1500 ml.

Sehingga diperoleh fungsi tujuan polinomial dua sebagai berikut :

$$f_3(x) = f_3(x_1) + f_3(x_2) + f_3(x_3)$$
$$\Leftrightarrow\ f_3(x) = -2x_1^3 + 161x_2^3 - 1760x_3^3 + 48x_1^2 - 2131x_2^2 + 9586x_3^2 + 17973x_1 + 38121x_2 + 19982x_3 + 34 \quad \textbf{(18)}$$

c. Fungsi Polinomial Empat

Berikut ditentukan nilai parameter fungsi polinomial empat menggunakan bantuan *software* Matlab maka diperoleh fungsi sebagai berikut :

1) Fungsi Polinomial Empat Produk Cup 240 ml

$$f_4(x_1) = -x_1^4 + 34x_1^3 - 476x_1^2 + 20411x_1 + 15 \quad \textbf{(19)}$$

2) Fungsi Polinomial Empat Produk Botol 600 ml

$$f_4(x_2) = 23x_2^4 - 231x_2^3 - 42x_2^2 + 34794x_2 - 58 \quad \textbf{(20)}$$

3) Fungsi Polinomial Empat Produk Botol 1500 ml

$$f_4(x_3) = 683x_3^4 - 6202x_3^3 + 17981x_3^2 - 13416x_3 \quad \textbf{(21)}$$

Berdasarkan fungsi nonlinear yang telah diperoleh maka dapat dilakukan analisis nilai galat yang telah diperoleh dari ketiga fungsi nonlinear yang ditunjukkan pada Tabel 4 berikut:

Tabel 4. Analisis Galat Fungsi Nonlinear

Fungsi Nonlinear	Galat (*error*)
Polinomial 2	**3%**
Polinomial 3	3.3%
Polinomial 4	19.75%

Pendekatan terbaik adalah pendekatan terhadap data dengan galat yang sangat kecil. Berdasarkan galat yang telah diperoleh dapat disimpulkan bahwa pendekatan terbaik adalah fungsi polinomial dua.

Pada proses produksi air mineral kemasan PT. Mitra Tirta Buwana dipengaruhi oleh beberapa faktor. Faktor-faktor tersebut disajikan pada tabel berikut :

Tabel 5. Rincian Biaya Faktor-Faktor Dalam Proses Produksi

Kebutuhan Produksi	**Cup (rupiah)**	**Botol 600 ml (rupiah)**	**Botol 1500 ml (rupiah)**	**Kapasitas (rupiah)**
Bahan Baku	1.172	1.640	2.650	10.350.000
Upah Pegawai	4.526	9.656	9.656	14.483.850
Biaya Kemasan	11.016	22.420	18.900	25.000.000

Pada masalah optimasi faktor-faktor tersebut menjadi kendala pada model pemrograman nonlinear. Sehingga diperoleh model linear pada masalah optimasi produksi air mineral kemasan PT. Mitra Tirta Buwana sebagai berikut:

Memaksimumkan

$$f_2(x) = -3x_1^2 - 101x_2^2 - 806x_3^2 + 18372x_1 + 32174x_2 + 34487x_3 - 331 \quad \textbf{(22)}$$

dengan kendala

$$x_1 + 1{,}399x_2 + 2{,}261x_3 \leq 8831{,}05 \quad \textbf{(23)}$$
$$x_1 + 2{,}133x_2 + 2{,}133x_3 \leq 3200{,}143 \quad \textbf{(24)}$$
$$x_1 + 2{,}035x_2 + 1{,}715x_3 \leq 1815{,}541 \quad \textbf{(25)}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \textbf{(26)}$$

2. Pembentukan Model Linear

Berdasarkan persamaan (22) diperoleh turunan parsialnya adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -6 < 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = -202 < 0$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} = -1612 < 0$$

Sedangkan turunan pertama pada kendala atau persamaan (23)-(26) adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 1 > 0 \qquad \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 1.399 > 0 \qquad \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} = 2.133 > 0$$

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} = 2.261 > 0 \qquad \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3} = 2.133 > 0$$

$$\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1} = 1 > 0 \qquad \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} = 2.035 > 0$$

$$\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_3} = 1.715 > 0$$

Karena pada turunan kedua yaitu $f''(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x} < 0$, maka fungsi $f(x)$ merupakan fungsi konkaf (Varberg dan Purcell, 2010: 157). Sedangkan pada turunan pertama kendala yaitu $g'(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} > 0$, maka fungsi $g(x)$ merupakan fungsi konveks(Varberg dan Purcell, 2010: 157). Menurut Rao (2009: 797), fungsi konkaf yang melengkung ke bawah artinya menunjukkan titik optimum maksimum lokal maka fungsi konkaf juga akan maksimum secara global

Berdasarkan proses linearisasi dengan bantuan syarat perlu *Karush Kuhn Tucker* maka diperoleh model linear baru pada optimasi produksi produk air mineral PT. Mitra Tirta Buwana adalah sebagai berikut :

Memaksimumkan

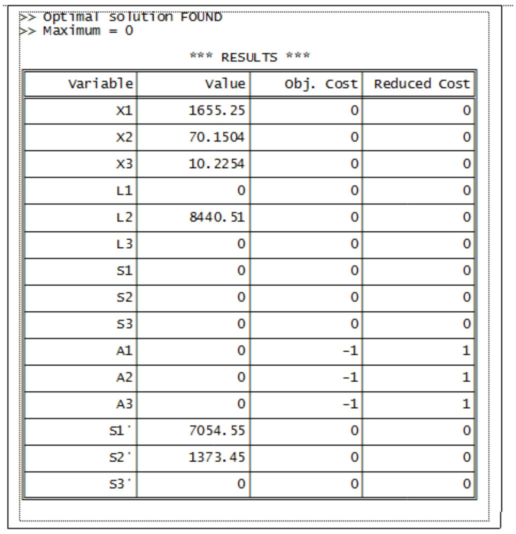
$$w = -a_1 - a_2 - a_3 \qquad \textbf{(27)}$$

dengan kendala

$$6x_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - s_1 + a_1 = 18372$$
$$202x_1 + (1{,}399\lambda_1 + 2{,}133\lambda_2 + 2{,}035\lambda_3) - s_2 + a_2 = 32174$$
$$1612x_1 + (2{,}261\lambda_1 + 2{,}133\lambda_2 + 1{,}715\lambda_3) - s_3 + a_3 = 34487$$
$$x_1 + 1{,}399x_2 + 2{,}261x_3 + s_1' = 8831{,}058$$
$$x_1 + 2{,}133x_2 + 2{,}133x_3 + s_2' = 3200{,}143$$
$$x_1 + 2{,}035x_2 + 1{,}715x_3 + s_3' = 1815{,}541$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$s_1, s_2, s_3 \geq 0$$
$$s_1', s_2', s_3' \geq 0$$
$$a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

3. Penyelesaian Model Linear Menggunakan Algoritma *Branch And Bound*

Setelah memperoleh model linear selanjutnya model linear tersebut akan diselesaikan menggunakan metode simpleks. Berikut merupakan output penyelesaian model linear menggunakan bantuan aplikasi LiPS.



```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 0
```

*** RESULTS ***

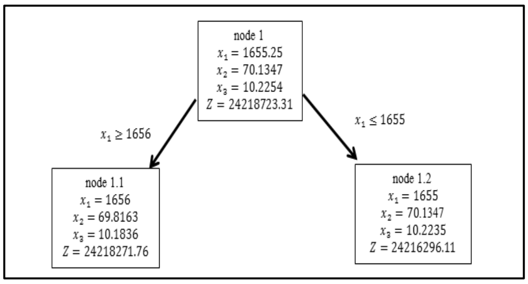
Variable	Value	Obj. Cost	Reduced Cost
X1	1655.25	0	0
X2	70.1504	0	0
X3	10.2254	0	0
L1	0	0	0
L2	8440.51	0	0
L3	0	0	0
S1	0	0	0
S2	0	0	0
S3	0	0	0
A1	0	-1	1
A2	0	-1	1
A3	0	-1	1
S1'	7054.55	0	0
S2'	1373.45	0	0
S3'	0	0	0

Gambar 2. Output Penyelesaian Model Linear dengan Aplikasi LiPs

Berdasarkan gambar 2 dapat diketahui bahwa dari model linear diperoleh nilai optimum pada $x_1 = 1655{,}25, x_2 = 70{,}1504, x_3 = 10{,}2254$, $\lambda_2 = 8440{,}51$, $s_1' = 7054{,}55$, $s_2' = 1373{,}45$. Nilai x_1, x_2, dan x_3 yang masing-masing merupakan variabel dari produk cup 240 ml, botol 600 ml, dan botol 150ml. Namun dalam masalah ini nilai optimum dari $x_1, x_2,$ dan x_3 diharapkan adalah suatu bilangan bulat. Hal ini dikarenakan satuan pada ketiga produk adalah karton, sehingga diperlukan bilangan integer untuk menunjukan jumlah produk. Selanjutnya akan dilakukan metode *branch and bound* pada nilai optimum ketiga variabel.

4. Penyelesaian Algoritma Branch and Bound Secara Manual

Penyelesaian algoritma *branch and bound* secara manual yang disajikan pada Gambar 3 sebagai berikut:



Gambar 3. Iterasi Penyelesaian Algoritma *Branch and Bound*

Berdasarkan penyelesaian manual pada Gambar 3 diperoleh nilai $x_1 = 1.656, x_2 = 70$, dan $x_3 = 9$. Penyelesaian algoritma *branch* *and bound* pada Gambar 2 hanya mewakili sebagian dari proses iterasi pertama pada penyelesaian algoritma *branch and bound*. Keterbatasan ruang dalam menyajikan proses penyelesaian algoritma *branch and bound* secara manual karena banyaknya iterasi yang dihasilkan sehingga tidak memungkinkan untuk disajikan pada penelitian ini.

Algoritma *branch and bound* diselesaikan menggunakan aplikasi LiPS dengan menambahkan syarat *integer* pada variabel x_1, x_2, dan x_3. Hal ini dilakukan untuk memastikan keakuratan hasil perhitungan algoritma *branch and bound* yang telah dihitung secara manual. Berikut output penyelesaian algoritma *branch and bound* menggunakan aplikasi LiPS :

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 0
              *** RESULTS ***
```

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	1656	0	YES
X2	70	0	YES
X3	9	0	YES
L1	0	0	NO
L2	9366.62	0	NO
L3	0	0	NO
S1	930.62	0	NO
S2	1945	0	NO
S3	0	0	NO
A1	0	-1	NO
A2	0	-1	NO
A3	0	-1	NO
S1'	7056.78	0	NO
S2'	1375.64	0	NO
S3'	207/125	0	NO

Gambar 3. Output Penyelesaian Algoritma *Branch and Bound* dengan Aplikasi LiPS

Berdasarkan output LiPS pada Gambar 3 maka pada penyelesaian algoritma *branch and bound* diperoleh nilai optimum untuk $x_1 = 1656, x_2 = 70,$ dan $x_3 = 9$. Sehingga hasil ini sesuai dengan hasil perhitungan manual.

Kemudian, ketiga nilai yang telah diperoleh tersebut disubstitusikan kedalam fungsi tujuan polinomial dua yaitu persamaan (22), sehingga diperoleh nilai sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= -3x_1^2 - 101x_2^2 - 806x_3^2 \\
&\quad +18.372x_1 + 32.174x_2 + 34.487x_3 \\
&\quad -331 \\
&= -3(1.656)^2 - 101(70)^2 - 806(9)^2 \\
&\quad +18.372(1.656) + 32.174(70) \\
&\quad +34.487(9) - 331 \\
&= Rp\ 24.199.070
\end{aligned}
$$

Jadi, diperoleh nilai optimum pada pemrograman nonlinear menggunakan algoritma *branch and bound* pada masalah ini adalah Rp $24.199.070,-$ dengan jumlah produk cup 240 ml sebanyak 1656 karton, produk botol 600 ml sebanyak 70 karton, dan produk botol 1500 ml sebanyak 9 karton. Jika hasil perhitungan tersebut dibandingkan dengan hasil perhitungan manual, maka hasil perhitungan tersebut memiliki nilai yang lebih kecil dari pada hasil perhitungan manual. Hal ini disebabkan oleh beberapa faktor diantaranya kurang lengkapnya data dan belum dipertimbangkannya biaya operasional.

E. SIMPULAN DAN SARAN

1. Simpulan

Berdasarkan penjelasan pada pembahasan, maka dapat disimpulkan beberapa hal berikut :

1) Hasil penjualan produk air mineral pada PT. Mitra Tirta Buwana adalah model nonlinear dengan fungsi tujuan berbentuk fungsi polinomial dua, fungsi polinomial tiga, dan fungsi polinomial empat. Berdasarkan perhitungan galat pada pendekatan fungsi polinomial dua, polinomial tiga dan polinomial empat terhadap data berturut-turut adalah 3%, 3.3%, 19.75%. Model matematika terbaik adalah model pendekatan terhadap data yang memiliki galat yang sangat kecil. Sehingga, model matematika yang terbaik untuk pengoptimalan hasil penjualan pada produksi produk air mineral PT. Mitra Tirta Buwana memiliki fungsi tujuan yang merupakan fungsi pendekatan polinomial dua. Fungsi pendekatan polinomial dua secara matematis ditulis sebagai berikut :

   Memaksimalkan
   $$
   \begin{aligned}
   f_2(x) &= -3\mathrm{x}_1^2 - 101\mathrm{x}_2^2 - 806\mathrm{x}_3^2 + 18372\mathrm{x}_1 \\
   &\quad +32174\mathrm{x}_2 + 34487x_3 - 331
   \end{aligned}
   $$
   Dengan kendala
   $$
   \begin{aligned}
   x_1 + 1.399x_2 + 2.261x_3 &\leq 8831.058 \\
   x_1 + 2.133x_2 + 2.133x_3 &\leq 3200.143 \\
   x_1 + 2.035x_2 + 1.715x_3 &\leq 1815.541
   \end{aligned}
   $$

2) Setelah diperoleh model terbaik yang merupakan pemrograman kuadratik, maka model pemrograman kuadratik tersebut dilinearisasi menggunakan kondisi *Karush Kuhn Tucker(KKT)* dan

diselesaikan dengan menggunakan bantuan algoritma *branch and bound.* Langkah penyelesaian model dengan pemrograman kuadratik adalah :

a. Membentuk Kondisi *Karush Kuhn Tucker* untuk fungsi nonlinear $f(x)$ yang terbentuk.
b. Mengidentifikasi *complementary slackness.*
c. Menambah variabel buatan untuk setiap kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang tidak memiliki variabel basis
d. Menentukan fungsi tujuan baru yang linear, yaitu memaksimumkan *w*

3) Berdasarkan hasil perhitungan algoritma *branch and bound* yang telah disubstitusikan ke dalam fungsi tujuan model nonlinear yaitu fungsi polinomial dua, diperoleh hasil pendapatan optimum dengan jumlah produksi masing-masing produk cup 240 ml sejumlah 1656 karton, botol 600 ml sejumlah 70 karton, dan botol 1500 ml sejumlah 9 karton pada kurun waktu satu bulan dengan hasil penjualan optimum adalah Rp 24.199.070

2. Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai optimasi produksi produk air mineral pada PT. Mitra Tirta Buwana dengan menggunakan penyelesaian nonlinear dengan bantuan algoritma *branch and bound*. Optimasi yang dilakukan hanya menggunakan tiga produk sebagai variabel sehingga pada penelitian selanjutnya disarankan menggunakan seluruh produk yang terdapat pada perusahaan. Selain itu, disarankan juga pada penelitian selanjutnya untuk mempertimbangkan biaya-biaya operasional yang mempengaruhi proses produksi dengan begitu dapat diperoleh keuntungan bersih dari penjualan produk. Sehingga proses optimasi pada pendapatan perusahaan dapat dilakukan secara maksimal.

Bagi pembaca yang tertarik untuk menganalisa metode optimasi model nonlinear, terdapat banyak metode penyelesaian yaang digunakan untuk menyelesaikan optimasi model nonlinear juga yaitu metode *Karush Kuhn Tucker*, metode *Separable,* dan *Ant Colony Optimization* (ACO). Terdapat juga beberapa algoritma yang dapat digunakan untuk dikombinasikan pada penyelesaian seperti algoritma genetika dan algortima dijkstra. Penggunaan metode-metode tersebut dapat disesuaikan dengan tujuan penelitian pembaca.

F. DAFTAR PUSTAKA

Berlianty, I., & Arifin, M. (2010). *Teknik-teknik optimasi heuristik.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Depkes RI. (2006). *Pedoman penyelenggaraan dan prosedur rekam medis rumah sakit di indonesia.* Jakarta: Depkes RI

Hariadi, V. (2009). Pencarian solusi pemrograman nonlinear menggunakan algoritma branch and bound. *SNATI 2009*, 79-84.

Hillier, F. (2001). *Introduction to operation research.* New York.

Khoerunisa, & Liebenlito, M. (2017). Kombinasi persyaratan karush kuhn tucker dan metode branch and bound pada pemrograman kuadratik konveks bilangan bulat murni. *Logika*, 52-60.

Luknanto, J. (2000). *Pengantar optimasi nonlinear.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Mulyono, S. (2004). *Riset operasi* . Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI.

Peressini, A. L., Sullivan, F. E., & Uhl, J. J. (1988). *the mathematics of nonlinear programming.* New York: Springer-Verlag Inc.

Rao, S. S. (2009). *Engineering optimization : Theory and practice, fourth ediition.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

Sauddin, A., & Sumarni, K. (2015). Integer programming dengan pendekatan metode branch and cut guna mengoptimalkan jumlah produk dengan keuntungan maksimal. *MSA, 3*, 45-52.

Triyanto, F., Adianto, H., & Susanty, S. (2015). Usulan rancangan rute distribusi gas LPG 3 kg menggunakan metode heuristik dan metode branch and bound di PT X. *Jurnal Online Institut Teknologi Nasional*, 194-205.

Winston, W. (2004). *Operations Reseearch : Application and algorithms.* Boston: Duxbury Press.