LUAS POLIGON PADA GEOMETRI HIPERBOLIK MENGGUNAKAN MODEL *POINCARÉ DISK*

POLYGON'S AREA ON HYPERBOLIC GEOMETRY USING POINCARÉ DISK MODEL

Oleh: Emi Lestari[1)], Himmawati Puji Lestari, M.Si[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
emilestari567@gmail.com[1)], himmawati@uny.ac.id[2)]

Abstrak

Geometri hiperbolik merupakan geometri yang didasarkan pada Postulat Kesejajaran Hiperbolik. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan penyajian objek dan konsep, segitiga, segitiga asimtotik, dan poligon serta luas poligon pada geometri hiperbolik menggunakan model *Poincaré disk*. Metode penelitian yang dilakukan adalah metode kajian pustaka yaitu dengan mengkaji definisi, aksioma, dan teorema yang berkaitan pada geometri Euclid dan geometri hiperbolik seperti segitiga, poligon, lingkaran, dan konsep luas. Kajian yang dilakukan menghasilkan: 1) Objek dan konsep dasar geometri hiperbolik menggunakan model *Poincaré disk* didasarkan pada empat Postulat Euclid yang pertama dan Postulat Kesejajaran Hiperbolik. 2) Segitiga *Poincaré* dibagi menjadi dua jenis yaitu segitiga *Poincaré* biasa dan segitiga *Poincaré* asimtotik. 3) Poligon *Poincaré* dibagi menjadi dua jenis yaitu poligon *Poincaré* biasa dan poligon *Poincaré* ideal 4) Luas poligon *Poincaré* ditentukan menggunakan total defek poligon tersebut.

Kata kunci: geometri hiperbolik, luas, poligon, model *Poincaré disk*

Abstract

Hyperbolic geometry was a geometry based on the Hyperbolic Parallel Postulate. The purpose of this research was to describe the model of objects and concepts, triangles, asymptotic triangles, and polygons and the area of polygons in hyperbolic geometry used the Poincaré disk model. The research method was literature study, it studied the definition, axiom, and theorems were related to Euclid geometry and hyperbolic geometry such as triangle, polygon, circle, and area concept. The results of this study were: 1) The basic objects and concepts of hyperbolic geometry used the Poincaré disk model were based on the fourth Euclid Postulates and Hyperbolic Parallel Postulate. 2) The Poincaré triangle was divided into two types, the usual Poincaré triangle and the asymptotic Poincaré triangle. 3) The Poincaré polygon was divided into two types, the common Poincaré polygon and the ideal Poincaré polygon 4) Area of the Poincaré polygon was determined by the total defects of it.

Keywords: hyperbolic geometry, area, polygon, Poincaré disk model

PENDAHULUAN

Geometri yang pertama kali muncul adalah Geometri Euclid. Geometri Euclid dibahas dalam sebuah karya berjudul "*The Elements*" yang ditulis oleh Euclides, seorang tokoh matematika dari Alexandria. Karya tersebut terdiri dari 13 buku, buku pertama memuat 5 definisi, 5 postulat, 5 aksioma, dan 48 teorema (Hadiwidjojo, 1986: 1.9). Geometri Euclid didasarkan pada lima asumsi dasar yang disebut aksioma atau postulat (Greenberg, 1994: 14). Euclid membedakan antara aksioma yang berlaku umum dan postulat yang berlaku untuk sains tertentu. Postulat atau aksioma digunakan sebagai dasar penentuan objek dan konsep dari geometri. Geometri Euclid dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif dan bertahan selama hampir 2000 tahun (Hadiwidjojo, 1986: 1.9). Meskipun geometri Euclid menjadi dasar dan digunakan sampai sekarang, geometri Euclid juga mempunyai beberapa kelemahan. Salah satu kelemahannya adalah postulat kelima Euclid yang berbunyi "*Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, jika kedua garis tersebut diperpanjang tak terbatas,* *maka akan bertemu dipihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku*" (Hadiwidjojo, 1986: 1.12). Postulat tersebut tidak memuat istilah garis sejajar, namun sering dimaknai sebagai Postulat Kesejajaran Euclid. Postulat tersebut menyatakan bahwa kondisi sudut-sudut yang dibentuk oleh suatu transversal yaitu jumlah besar sudut dalam sepihak kurang dari besar dua sudut siku-siku menunjukkan bahwa kedua garis tersebut tidak paralel (Venema, 2012: 3). Postulat tersebut menimbulkan kerisauan dikalangan matematikawan karena menganggapnya sebagai suatu teorema yang diturunkan dari empat postulat Euclid lainnya dan perlu dibuktikan, namun Euclid tidak menyebutkannya sebagai teorema melainkan postulat yang tidak perlu dibuktikan lagi (Prabowo, 2009: 68).

Beberapa ahli matematika mencoba membuktikan bahwa postulat tersebut salah, namun tidak berhasil. Dari kegagalan tersebut, para ilmuwan menyadari bahwa ada kemungkinan muncul suatu teori baru dari geometri yang berdasar pada Postulat Kesejajaran Euclid. Salah satu ahli matematika yang menemukan teori atau gagasan baru mengenai postulat kesejajaran Euclid adalah Nikolai Lobachevsky (1792-1856). Lobachevsky menyatakan bahwa "*Untuk setiap garis l dan untuk setiap titik P yang tidak terletak pada l, ada paling sedikit dua garis* m *dan* n *sehingga P terletak pada keduanya dan keduanya sejajar dengan l*" (Venema, 2012: 21). Hal yang dinyatakan oleh Lobachevsky tersebut dikenal sebagai Postulat Kesejajaran Lobachevsky dan merupakan dasar dari geometri Lobachevsky atau sering disebut geometri hiperbolik. Dinamakan geometri hiperbolik karena geometri tersebut ditunjukkan pada "*horosphere*" yang sesuai dengan model ruang hiperbolik dengan garis diilustrasikan sebagai "*horocycle*" (Greenberg,1994: 185).

Geometri hiperbolik merupakan geometri dengan konsep kesejajaran yang berlawanan dengan Postulat Kesejajaran Euclid. Jadi, geometri hiperbolik merupakan geometri yang didasarkan pada keempat Postulat Euclid yang pertama tanpa Postulat Kesejajaran Euclid (Ternes, 2013: 14), sehingga objek dan konsep dasar seperti titik, garis, jarak dan sudut pada geometri hiperbolik sama dengan geometri Euclid.

Perbedaan konsep kesejajaran antara geometri Euclid dan geometri hiperbolik menyebabkan penyajian objek geometri keduanya menggunakan model bidang yang berbeda. Model bidang yang digunakan untuk menyatakan objek-objek geometri Euclid misalnya adalah daerah jajargenjang, sedangkan geometri hiperbolik mempunyai beberapa model bidang untuk menyatakan objek-objeknya yaitu model *upper half plane*, model *Klein Beltrami*, model *Poincaré disk* dan model *hiperboloida* (Reynolds, 1993: 453-454).

Penggunaan suatu model dapat mempermudah pengilustrasian objek dan konsep pada geometri hiperbolik. Hasil kajian sebelumnya sudah ada yang menggunakan suatu model yaitu model hiperboloida oleh Reynolds (1993) dan belum ada yang menggunakan model lain untuk menyajikan geometri hiperbolik, secara khusus untuk menentukan luas poligon dari geometri hiperbolik. Oleh karena itu, konsep luas poligon pada geometri hiperbolik perlu dikaji menggunakan model yang lain untuk mengetahui pengilustrasian objek dan konsep yang berkaitan dengan luas poligon hiperbolik pada model bidang yang berbeda. Model bidang yang akan digunakan berupa suatu lingkaran Euclid yang disebut model *Poincaré disk*. Model *Poincaré disk* digunakan karena merupakan model yang paling sederhana namun belum banyak dikaji mengenai konsep luas pada geometri hiperbolik menggunakan model tersebut.

Pada tulisan ini akan dibahas luas pada geometri hiperbolik berupa poligon yang berkaitan dengan segitiga asimtotik menggunakan model *Poincaré disk*.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah metode kajian pustaka. Penelitian dilakukan dengan mengkaji beberapa definisi, aksioma, postulat, dan teorema terkait pada geometri Euclid dan geometri hiperbolik yang digunakan untuk penentuan luas poligon pada model *Poincaré disk* diantaranya adalah segitiga, poligon, lingkaran dan konsep luas.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Geometri hiperbolik didasarkan pada Postulat Euclid yang pertama sehingga objek dan konsep dasarnya hampir sama seperti pada geometri Euclid. Perbedaannya terletak pada model bidang untuk menyajikan objek dan konsep dasar tersebut, untuk geometri Euclid menggunakan jajargenjang sedangkan pada geometri hiperbolik mempunyai beberapa macam model bidang salah satunya adalah model *Poincaré disk*. Oleh karena itu, akan dibahas penyajian objek dan konsep dasar geometri hiperbolik terlebih dahulu sebelum membahas mengenai luas poligon yang berkaitan dengan segitiga asimtotik menggunakan model *Poincaré disk*.

Penyajian Objek dan Konsep Geometri Hiperbolik

Penyajian objek dan konsep geometri hiperbolik berupa titik, garis, sudut, jarak, dan kesejajaran. Model bidang yang digunakan untuk menyajikan objek dan konsep tersebut menggunakan model *Poincaré disk.*

Model *Poincaré disk* merupakan suatu bidang datar Euclid untuk menyatakan objek-objek pada geometri hiperbolik dan didasarkan pada empat Postulat Euclid pertama tanpa Postulat Kesejajaran Euclid (Ternes, 2013: 14). Bidang datar Euclid yang dimaksud merupakan suatu lingkaran Euclid dengan jari-jari satu dan berpusat di titik O yang disebut lingkaran satuan Euclid, lingkaran satuan tersebut disimbolkan dengan γ (Venema, 2012: 291). Selanjutnya akan dibahas titik, garis, jarak, sudut, dan kesejajaran hiperbolik menggunakan model *Poincaré disk.*

Titik *Poincaré* merupakan titik hiperbolik yang berada di dalam lingkaran satuan γ (Venema, 2012: 291) dan titik ideal merupakan titik yang berada pada lingkaran satuan γ (Venema, 2012: 292). Keberadaan titik ideal akan mempengaruhi jenis sudut, segitiga *Poincaré,* dan poligon *Poincaré.*

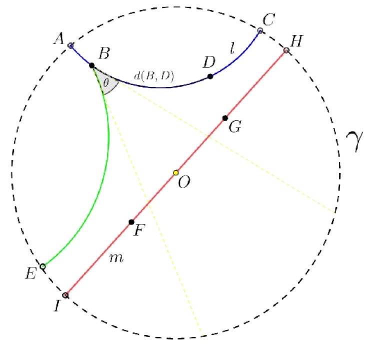
Garis *Poincaré* dibedakan menjadi dua macam berdasarkan cara penyajiannya. Pertama, garis *Poincaré* disajikan sebagai diameter lingkaran satuan γ. Kedua, garis *Poincaré* disajikan sebagai busur lingkaran Euclid, misalnya α, yang ortogonal dengan lingkaran satuan γ (Venema, 2012: 291). Selain garis, pada model ini juga terdapat sinar garis dan ruas garis. Sinar garis *Poincaré* memuat satu titik *Poincaré* sebagai titik pangkalnya dan satu titik ideal sebagai titik ujungnya. Ruas garis *Poincaré* memuat dua titik *Poincaré* sebagai ujung-ujungnya.

Jarak *Poincaré* merupakan jarak antara dua titik *Poincaré*. Jarak tersebut ditentukan menggunakan *cross-ratio* yaitu

$$d(A, B) = |ln(AB, PQ)|, \quad (1)$$

dengan $d(A, B)$ merupakan jarak *Poincaré* dan (AB, PQ) merupakan *cross-ratio*.

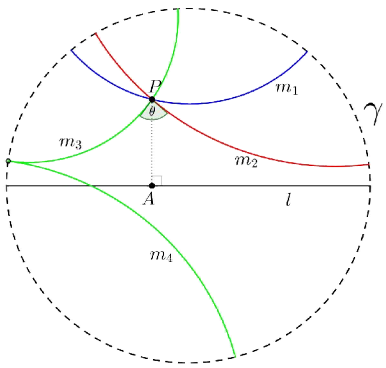
Sudut *Poincaré* terbentuk dari dua sinar garis *Poincaré* dengan titik ujung yang sama (Venema, 2012: 291). Sudut *Poincaré* terbentuk jika titik ujung sinar garis berada di dalam lingkaran satuan γ, sehingga mempunyai ukuran berhingga. Ukuran sudut *Poincaré* disebut dengan besar sudut *Poincaré*. Karena ukuran sudut *Poincaré* berhingga maka besar sudut dapat dihitung. Sudut yang terbentuk dari dua sinar *Poincaré* dengan titik ujung sama berupa titik ideal, sehingga sudut yang terbentuk disebut dengan sudut ideal. Sudut ideal diasumsikan mempunyai ukuran sudut yang besarnya nol.



Gambar 1. Ilustrasi Objek Geometri Hiperbolik

Gambar 1 merupakan ilustrasi objek geometri hiperbolik pada model *Poincaré disk*. Titik *Poincaré* ditunjukkan oleh titik B, D, F, dan G. Titik ideal ditunjukkan oleh titk A, E, I, C, dan H. Garis *Poincaré* berupa diameter ditunjukkan oleh garis m dan berupa busur ditunjukkan oleh busur l. Jarak *Poincaré* antara titik B dan D disimbolkan oleh $d(B, D)$, sehingga jarak antara dua titik *Poincaré* sama dengan panjang ruas garis dengan kedua titik tersebut sebagai ujung-ujungnya. Sudut *Poincaré* ditunjukkan oleh sudut θ atau $\angle CBE$, sudut tersebut dibentuk oleh sinar garis *Poincaré* $\overrightarrow{BE}$ dan $\overrightarrow{BC}$ dengan titik pangkal yang sama yaitu B.

Garis-garis sejajar *Poincaré* merupakan garis-garis sejajar asimtotik karena mempunyai satu titik ideal yang sama atau berpotongan di titik yang sama pada lingkaran satuan γ (Anderson, 2005: 6). Kesejajaran *Poincaré* juga dapat dibagi menjadi beberapa jenis yaitu garis *Poincaré* sejajar asimtotik, garis *Poincaré* ultraparalel, dan garis *Poincaré* multiparalel. Gambar 2 menunjukkan jenis garis-garis sejajar *Poincaré*. Garis-garis sejajar asimtotik ditunjukkan oleh garis m_3 dan m_4. Garis-garis ultraparalel ditunjukkan oleh garis m_1 dan l. Garis-garis m_2 dan m_3 sejajar dengan garis l, garis-garis tersebut disebut garis-garis multiparalel.



Gambar 2. Jenis Kesejajaran *Poincaré*

Selain garis-garis sejajar, pada geometri hiperbolik juga terdapat istilah sudut kesejajaran yang terbentuk dari dua sinar garis sejajar dan mempunyai titik pangkal yang sama. Sudut kesejajaran ditunjukkan pada Gambar 2 melalui sudut θ.

Segitiga *Poincaré*

Segitiga *Poincaré* merupakan bangun datar yang dibatasi oleh tiga ruas garis *Poincaré* atau sinar *Poincaré* atau garis *Poincaré* yang tidak setitik dan saling berimpit pada suatu titik sudut *Poincaré* atau titik ideal. Sama halnya dengan segitiga pada geometri Euclid, segitiga *Poincaré* juga mempunyai daerah yang merupakan gabungan dari segitiga *Poincaré* dan interiornya. Daerah segitiga *Poincaré* disimbolkan dengan $\boldsymbol{T}$.

Salah satu sifat yang dimiliki segitiga *Poincaré* adalah jumlah besar sudutnya kurang dari 180. Sifat tersebut mempengaruhi penentuan luas suatu daerah segitiga *Poincaré*, karena jumlah besar sudut segitiga *Poincaré* kurang dari 180 maka luas dari daerah segitiga *Poincaré* ditentukan oleh selisih antara 180 dan jumlah besar sudut segitiga *Poincaré* tersebut. Selisih tersebut disebut defek segitiga *Poincaré*. Defek pada pembahasan ini merupakan bilangan nyata tak negatif dan bukan merupakan banyaknya derajat. Oleh karena itu, defek segitiga *Poincaré* dapat digunakan untuk menentukan luas dari segitiga tersebut.

Luas segitiga *Poincaré* mempunyai konsep yang sama dengan luas segitiga hiperbolik secara umum yaitu menggunakan defek. Luas pada pembahasan ini disimbolkan dengan L. Menurut Venema (2012: 191), luas dan defek segitiga hiperbolik adalah sebanding, maka luas dan defek segitiga *Poincaré* juga sebanding. Oleh karena itu, luas segitiga *Poincaré* ΔABC dapat dinyatakan melalui persamaan (2) berikut,

$$L(\Delta ABC) = k\delta(\Delta ABC), \tag{2}$$

dengan k merupakan suatu konstanta.

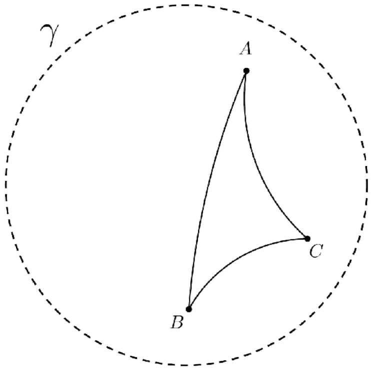
Selanjutnya akan dibahas jenis segitiga *Poincaré* yang ditentukan oleh banyaknya titik ideal yang dimuat segitiga tersebut. Segitiga *Poincaré* biasa merupakan segitiga *Poincaré* yang terdiri dari tiga ruas garis *Poincaré* dan tiga titik sudut *Poincaré*. Segitiga tersebut memuat sudut yang besarnya tak nol dan tiga sisi berhingga. Defek segitiga *Poincaré* biasa ditentukan oleh besar ketiga sudutnya karena setiap sudut segitiga tersebut besarnya tak nol. Defek segitiga *Poincaré* biasa disimbolkan dengan δ_0, indeks 0 digunakan untuk menyatakan bahwa segitiga tersebut tidak memuat titik ideal, sehingga

$$\delta_0 = 180 - (m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle ACB) \tag{3}$$

Jadi, segitiga *Poincaré* biasa mempunyai luas yang ditentukan oleh defek segitiga tersebut yang dituliskan melalui persamaan (4).

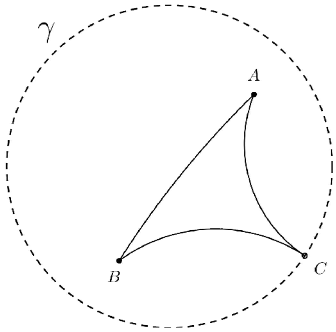
$$L(\Delta ABC) = k\delta_0. \tag{4}$$

Gambar 3 merupakan ilustrasi dari segitiga *Poincaré* biasa.



Gambar 3. Segitiga *Poincaré* Biasa

Segitiga *Poincaré* single asimtotik merupakan segitiga *Poincaré* yang memuat satu titik sudut ideal dan dua titik sudut *Poincaré*. segitiga *Poincaré* single asimtotik diilustrasikan seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Segitiga *Poincaré* Single Asimtotik

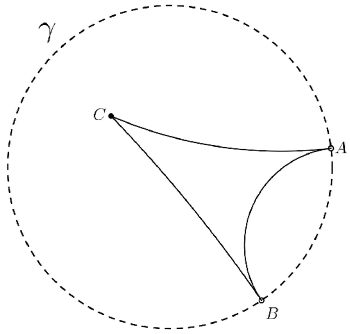
Defek segitiga *Poincaré* single asimtotik ditentukan oleh besar dua sudut *Poincaré* karena memuat satu sudut ideal yang besarnya nol. Defek segitiga *Poincaré* single asimtotik disimbolkan dengan δ_1, indeks 1 digunakan untuk menyatakan bahwa segitiga tersebut memuat satu titik ideal, sehingga

$$\delta_1 = 180 - (m\angle BAC + m\angle ABC). \quad (5)$$

Jadi, segitiga *Poincaré* single asimtotik mempunyai luas yang ditentukan oleh defek segitiga tersebut yang dituliskan melalui persamaan (6).

$$L(\Delta ABC) = k\delta_1. \quad (6)$$

Segitiga *Poincaré* dobel asimtotik merupakan segitiga *Poincaré* yang memuat dua titik sudut ideal. Segitiga tersebut diilustrasikan seperti pada Gambar 5.



Gambar 5. Segitiga *Poincaré* Dobel Asimtotik

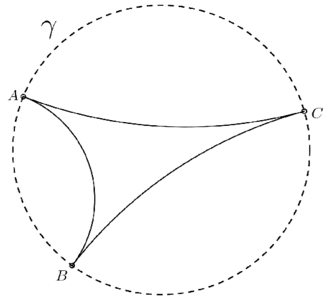
Defek segitiga *Poincaré* dobel asimtotik ditentukan oleh besar satu sudut *Poincaré* karena memuat dua sudut ideal yang besarnya nol. Defek segitiga *Poincaré* dobel asimtotik disimbolkan dengan δ_2, indeks 2 digunakan untuk menyatakan bahwa segitiga tersebut memuat dua titik ideal, sehingga

$$\delta_2 = 180 - (m\angle ACB). \quad (7)$$

Jadi, segitiga *Poincaré* dobel asimtotik mempunyai luas yang ditentukan oleh defek segitiga tersebut yang dituliskan melalui persamaan (8).

$$L(\Delta ABC) = k\delta_2. \quad (8)$$

Segitiga *Poincaré* trebel asimtotik merupakan segitiga *Poincaré* yang memuat tiga titik sudut ideal. Segitiga diilustrasikan seperti pada Gambar 6.



Gambar 6. Segitiga *Poincaré* Trebel Asimtotik

Defek segitiga *Poincaré* trebel asimtotik tidak bergantung pada besar ketiga sudutnya karena ketiga sudutnya merupakan sudut ideal yang besarnya nol. Defek segitiga *Poincaré* trebel asimtotik disimbolkan dengan δ_3, indeks 3 digunakan untuk menyatakan bahwa segitiga tersebut memuat tiga titik ideal, sehingga

$$\delta_3 = 180. \tag{9}$$

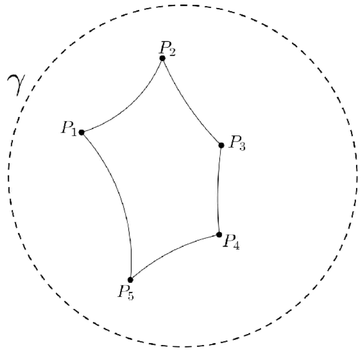
Defek segitiga *Poincaré* trebel asimtotik selalu konstan. Oleh karena itu, luas segitiga *Poincaré* trebel asimtotik merupakan kelipatan konstan dari defeknya dan dituliskan melalui persamaan (10) berikut,

$$L(\Delta ABC) = k\delta_3. \tag{10}$$

Poligon *Poincaré*

Poligon *Poincaré* sama halnya dengan poligon pada geometri Euclid yaitu gabungan ruas garis atau sinar garis atau garis *Poincaré* yang menghubungkan dua titik *Poincaré* berbeda dan berdekatan. Berdasarkan banyaknya titik ideal, poligon *Poincaré* dibagi menjadi dua jenis yaitu poligon *Poincaré* tanpa titik ideal yang disebut poligon *Poincaré* biasa dan poligon *Poincaré* dengan titik ideal yang disebut poligon *Poincaré* ideal.

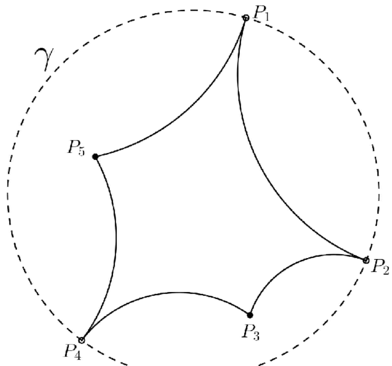
Poligon *Poincaré* biasa merupakan poligon *Poincaré* yang tidak memuat titik ideal sehingga besar setiap sudutnya tak nol dan setiap sisinya berhingga. Banyak sisi poligon disimbolkan dengan n dan banyak titik ideal disimbolkan dengan j, sehingga Poligon *Poincaré* biasa memuat n sisi dan $j = 0$ titik ideal.



Gambar 7. Poligon *Poincaré* Biasa

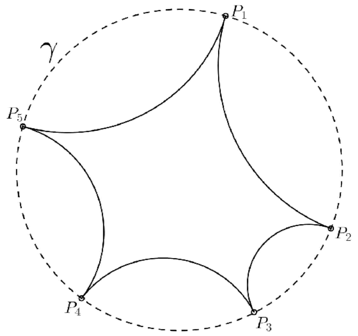
Gambar 7 merupakan contoh poligon *Poincaré* biasa dengan lima sisi dan semua titik sudutnya merupakan titik sudut *Poincaré*.

Poligon *Poincaré* ideal merupakan poligon *Poincaré* yang memuat titik ideal. Poligon *Poincaré* ideal dibagi menjadi dua jenis berdasarkan banyak titik ideal yang dimuat yaitu poligon *Poincaré* dengan banyak titik ideal kurang dari dari banyak sisi poligon atau $j < n$ dan banyak titik ideal sama dengan banyak sisi atau $j = n$.



Gambar 8. Poligon *Poincaré* Ideal $\boldsymbol{j} < n$

Gambar 8 merupakan contoh poligon *Poincaré* ideal dengan banyak titik ideal kurang dari banyak sisi. Pada Gambar 8 ditunjukkan bahwa poligon memuat tiga titik ideal dan mempunyai lima sisi. Letak titik ideal ada yang berdekatan dan ada yang tidak berdekatan. Oleh karena itu, untuk poligon tersebut dapat dibagi lagi menjadi dua kasus yaitu kasus titik ideal berurutan dan titik ideal tidak beururutan. Selanjutnya akan diilustrasikan poligon *Poincaré* ideal dengan banyak titik ideal sama dengan banyak sisi seperti pada Gambar 9.



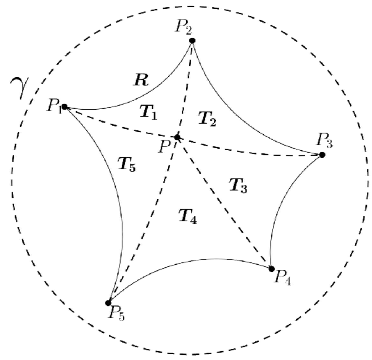
Gambar 9. Poligon *Poincaré* Ideal $\boldsymbol{j = n}$

Gambar 9 merupakan contoh poligon *Poincaré* ideal dengan banyak titik ideal sama dengan banyak sisi yaitu sebanyak lima titik ideal dan lima sisi.

Triangulasi pada Poligon *Poincaré*

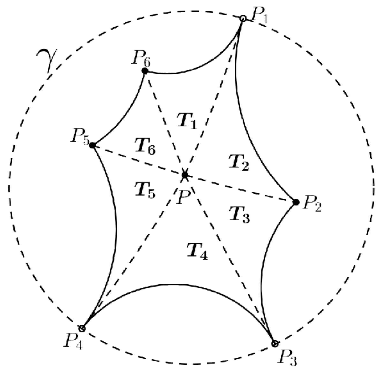
Poligon *Poincaré* mempunyai daerah poligon seperti halnya poligon pada geometri Euclid. Oleh karena itu, daerah poligon *Poincaré* merupakan gabungan dari daerah segitiga *Poincaré* yang berhimpit pada salah satu sisi atau titik sudutnya. Daerah poligon *Poincaré* disimbolkan dengan $\boldsymbol{R}$. Pembagian daerah poligon *Poincaré* menjadi daerah segitiga *Poincaré* disebut triangulasi. Triangulasi pada daerah poligon *Poincaré* dilakukan dengan konsep yang sama dengan triangulasi pada daerah poligon Euclid. Pembagian daerah poligon menggunakan triangulasi bintang mempermudah pembagian daerah poligon *Poincaré* menjadi daerah segitiga *Poincaré* sesuai dengan jenis segitiga *Poincaré* yang telah dibahas sebelumnya, sehingga defek dari poligon *Poincaré* juga lebih mudah untuk ditentukan. Triangulasi bintang dapat digunakan untuk membagi daerah poligon *Poincaré* biasa dan ideal menjadi daerah-daerah segitiga *Poincaré*.

Triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* biasa menghasilkan segitiga-segitiga *Poincaré* biasa.

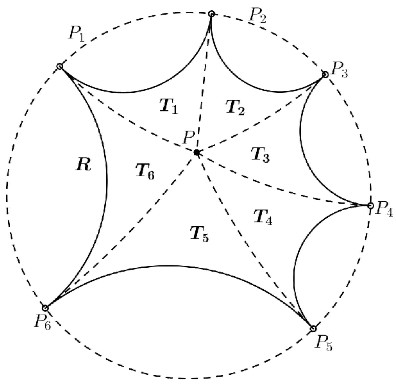


Gambar 9. Triangulasi pada Poligon *Poincaré* Biasa

Triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* ideal menghasilkan segitiga *Poincaré* biasa atau segitiga *Poincaré* single asimtotik atau segitiga dobel asimtotik. Triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* ideal dengan $j < n$ dan $j = n$ diilustrasikan secara berturut-turut melalui Gambar 11 dan Gambar 12.



Gambar 11. Triangulasi Bintang pada Poligon *Poincaré* dengan $\boldsymbol{j} < n$



Gambar 12. Triangulasi Bintang pada Poligon *Poincaré* dengan $\boldsymbol{j = n}$

Hasil triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* biasa atau ideal menghasilkan segitiga *Poincaré* yang memuat paling banyak dua titik ideal atau segitiga *Poincaré* dobel asimtotik.

Luas Poligon *Poincaré*

Luas poligon *Poincaré* ditentukan menggunakan total defek poligon *Poincaré* yang diperoleh dari defek segitiga-segitiga *Poincaré* hasil triangulasi bintang pada poligon tersebut. Luas poligon *Poincaré* pada pembahasan ini merupakan luas dari poligon *Poincaré* sebarang konveks. Karena poligon *Poincaré* merupakan gabungan dari segitiga-segitiga *Poincaré*, maka luasnya merupakan jumlahan dari luas setiap segitiga yang terbentuk dari hasil triangulasi bintang terhadap poligon tersebut. Hal tersebut menyebabkan luas setiap jenis poligon *Poincaré* bergantung pada jenis segitiga *Poincaré* hasil triangulasi dengan konsep luas berbeda seperti yang telah ditentukan sebelumnya. Berikut ini merupakan pembahasan luas untuk setiap jenis poligon *Poincaré*.

1. Luas Poligon *Poincaré* Biasa

Hasil triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* biasa menghasilkan segitiga *Poincaré* biasa artinya luas poligon *Poincaré* biasa merupakan jumlahan dari luas segitiga-segitiga *Poincaré* biasa, sehingga luas poligon *Poincaré* sebanding dengan jumlahan defek dari setiap segitiga *Poincaré* biasa. Luas poligon *Poincaré* biasa dituliskan melalui persamaan (11) berikut,

$$L = k\left(\textstyle\sum_{a=1}^{s} \delta_{0a}\right). \tag{11}$$

dengan s merupakan banyak segitiga *Poincaré* biasa dan δ_{0a} merupakan defek segitiga *Poincaré* biasa ke a.

2. Luas Poligon *Poincaré* Ideal untuk $j < n$

Hasil triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* ideal untuk $j < n$ menghasilkan segitiga *Poincaré* biasa, segitiga *Poincaré* single asimtotik, dan segitiga *Poincaré* dobel asimtotik. Akibatnya, luas poligon *Poincaré* ideal untuk $j < n$ merupakan jumlahan dari luas segitiga *Poincaré* biasa, luas segitiga *Poincaré* single asimtotik, dan luas segitiga *Poincaré* dobel asimtotik. Luas poligon *Poincaré* ideal untuk $j < n$ dituliskan melalui persamaan (12) berikut,

$$L = k\left(\textstyle\sum_{a=1}^{s} \delta_{0a} + \sum_{b=1}^{t} \delta_{1b} + \sum_{c=1}^{u} \delta_{2c}\right). \tag{12}$$

dengan s merupakan banyak segitiga *Poincaré* biasa, t merupakan banyak segitiga *Poincaré* single asimtotik, dan u merupakan banyak segitiga *Poincaré* dobel asimtotik. Untuk δ_{0a} merupakan defek segitiga *Poincaré* biasa ke a, δ_{1b} merupakan defek segitiga *Poincaré* single asimtotik ke b, dan δ_{2c} merupakan defek segitiga *Poincaré* trebel asimtotik ke c.

3. Luas Poligon *Poincaré* Ideal untuk $j = n$

Hasil triangulasi bintang pada poligon *Poincaré* ideal untuk $j = n$ menghasilkan segitiga *Poincaré* dobel asimtotik sebanyak n. Akibatnya, luas poligon *Poincaré* ideal untuk $j = n$ merupakan jumlahan dari luas segitiga *Poincaré* dobel asimtotik, sehingga luas poligon *Poincaré* sebanding dengan jumlahan defek dari setiap segitiga *Poincaré* dobel asimtotik. Luas poligon *Poincaré* ideal dituliskan melalui persamaan (13).

$$L = k(\sum_{c=1}^{u} \delta_{2c}). \qquad (13)$$

dengan u merupakan banyak segitiga *Poincaré* dobel asimtotik dan δ_{2c} merupakan defek segitiga *Poincaré* trebel asimtotik ke c.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, dapat diperoleh beberapa simpulan. 1) Objek dan konsep dasar geometri hiperbolik menggunakan model *Poincaré disk* didasarkan pada empat Postulat Euclid yang pertama dan Postulat Kesejajaran Hiperbolik, sehingga pembahasan objek dan konsep dasar berupa titik, garis, jarak, dan sudut sama halnya dengan geometri Euclid. 2) Segitiga *Poincaré* dibagi menjadi dua jenis yaitu segitiga *Poincaré* biasa dan segitiga *Poincaré* asimtotik. Jenis tersebut dipengaruhi oleh banyak titik ideal yang dimuat segitiga *Poincaré*. 3) Poligon *Poincaré* dibagi menjadi dua jenis yaitu poligon *Poincaré* biasa dan poligon *Poincaré* ideal. 4) Luas poligon *Poincaré* ditentukan menggunakan total defek poligon tersebut. Total defek poligon *Poincaré* merupakan jumlahan dari defek segitiga *Poincaré* biasa, segitiga *Poincaré* single asimtotik, atau segitiga *Poincaré* dobel asimtotik.

Saran

Pada penelitian ini hanya dibahas konsep luas untuk poligon hiperbolik yang disajikan menggunakan model *Poincaré disk*. Konsep luas belum dibahas menggunakan analisis yang mendalam yaitu mengubah model bidang *Poincaré* ke dalam model bidang kompleks. Selain itu, hal yang perlu dikaji untuk penelitian selanjutnya adalah bangun datar lain seperti lingkaran, trigonometri dan transformasi pada geometri hiperbolik yang disajikan menggunakan model lain seperti model *Klein Beltrami*.

DAFTAR PUSTAKA

Greenberg, M. J. (1994). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history (3rd ed.)*. New York: W. H. Freeman and Company.

Hadiwidjojo, M. (1986). *Sistem-sistem geometri.* Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Prabowo, A. (2009). Postulat kesejajaran Euclid dalam tinjauan sejarah. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jenderal Soedirman,* 1, 67-91.

Reynolds, W. F. (1993). Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *Mathematical Association of America* , 442-455.

Ternes, M. (2013). Tangent circles in the hyperbolic disk. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal ,* 14, 12-26.

Venema, G. A. (2012). *The foundation of geometry (2nd ed.)*. Boston: Pearson Education.