

PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT EBOLA DAN ANALISIS PENGARUH PARAMETER LAJU TRANSMISI TERHADAP PERILAKU DINAMISNYA

MATHEMATICAL MODELING THE SPREAD OF EBOLA AND ANALYZE THE TRANSMISSION PARAMETER TO DYNAMICS

Oleh : Yusnita Afrida¹⁾, Nikenasih Binatari, M.Si.²⁾, Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si.³⁾
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
¹⁾yusnitaafrika@gmail.com, ²⁾nikenasih@gmail.com, ³⁾kuspk@uny.ac.id

Abstrak

Kajian ini bertujuan untuk mendapatkan model matematika dari penyebaran penyakit virus Ebola, menganalisis dinamika penyebarannya, dan mengetahui jenis bifurkasi yang terjadi apabila parameter laju transmisi (β) divariasikan. Model matematika yang terbentuk adalah model *SEIJR*. Sistem persamaan dari model *SEIJR* mengalami bifurkasi pada saat $\beta = 0,49$. Saat $\beta < 0,49$ terdapat titik ekuilibrium bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik artinya ketika setiap kelompok pada jumlah tertentu, interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi menghasilkan individu laten kurang dari 0,49 dari banyaknya interaksi tersebut, sehingga penyakit tidak akan menyebar dan populasi terbebas dari penyakit seiring berjalannya waktu. Saat $\beta > 0,49$ terdapat titik ekuilibrium endemik yang bersifat stabil asimtotik artinya ketika setiap kelompok pada jumlah tertentu, interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi menghasilkan individu laten lebih dari 0,4890283 dari banyaknya interaksi tersebut, sehingga penyakit akan menyebar dan populasi berada dalam keadaan endemik seiring berjalannya waktu. Variasi nilai β pada sistem persamaan model *SEIJR* menyebabkan terjadinya bifurkasi transkritikal.

Kata kunci : *penyakit virus Ebola, pemodelan matematika, kestabilan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, bifurkasi transkritikal.*

Abstract

*This study aims to get the mathematical model for the spread of Ebola virus disease, to analyze the dynamics of its spread, and to know the type of the bifurcation that occurs if the transmission rate (β) varied. A mathematical model that is formed is *SEIJR* and $\beta = 0,49$ is a bifurcation value. If $\beta < 0,49$, the free disease equilibrium is asymptotically stable, it means at a certain amount, interaction between susceptible individuals and infected individuals produces exposed individuals less than 0,49 of the many interaction, so the disease will not spread and the population is free from disease over time. If $\beta > 0,49$, the endemic equilibrium is asymptotically stable, it means at a certain amount, interaction between susceptible individuals and infected individuals produces exposed individuals more than 0,49 of the many interaction, so the disease will spread and the population is in an endemic state as time passes. The variation of β in the system leads to transcritical bifurcation.*

Keywords: *Ebola virus disease, mathematical modeling, stability of equilibrium, basic reproduction number, transcritical bifurcation.*

PENDAHULUAN

Penyakit virus Ebola merupakan salah satu penyakit menular dan mematikan dengan rata-rata tingkat kematian mencapai 50%. Penularan penyakit tersebut dapat terjadi dari hewan ke manusia dan manusia ke manusia baik secara langsung maupun secara tidak langsung (WHO, 2014). Mudah-mudahan penularan penyakit virus Ebola telah menyebabkan wabah di beberapa negara. Beberapa faktor seperti tingkat penularan virus dan cara penanganan kasus dapat

mempengaruhi penyebaran penyakit virus Ebola (Chowell, Safan, Chavez, 2015: 3).

Dinamika penyakit virus Ebola dalam suatu populasi dapat dikaji salah satunya dengan model matematika SIR. Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh W.O. Kermack dan Mc. Kendrick yang membagi populasi manusia menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu rentan, kelompok individu terinfeksi, dan kelompok individu sembuh (Iswanto, 2012: 151). Untuk beberapa penyakit model SIR dapat

diterapkan, namun pada penyakit virus Ebola model SIR tidak cukup untuk merealisasikan penyebaran penyakit tersebut sehingga banyak peneliti mengembangkan model ini.

Diego Chowell, Muntaser Safan, dan Carlos Castillo-Charez pada tahun 2015 mengembangkan model SIR menjadi model SE_1E_2IJR . Model tersebut membagi populasi manusia menjadi enam kelompok, yaitu kelompok individu rentan, kelompok individu laten tidak terdeteksi, kelompok individu laten terdeteksi, kelompok individu terinfeksi, kelompok individu terisolasi dengan tingkat efektivitas tertentu, dan kelompok individu sembuh. Di dalam penelitiannya Chowell, Safan, dan Charez melakukan analisis sensitivitas pada parameter-parameter yang digunakan dalam model SE_1E_2IJR . Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa parameter laju transmisi adalah parameter dengan tingkat sensitivitas tertinggi (Chowell, Safan, Chavez, 2015: 15).

Tingginya sensitivitas parameter laju transmisi dapat mempengaruhi perilaku dinamis dari suatu sistem sehingga memunculkan adanya bifurkasi. Bifurkasi adalah perubahan kestabilan suatu sistem dinamik yang diakibatkan oleh variasi nilai parameter. Terdapat beberapa jenis bifurkasi, diantaranya yaitu bifurkasi *Saddle-Node*, bifurkasi transkritikal, bifurkasi *pitchfork*, dan bifurkasi Hopf.

Pada jurnal ini akan dibentuk model matematika penyebaran penyakit virus Ebola dari manusia ke manusia. Dari model yang terbentuk dan dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter berdasarkan penelitian Chowell, Safan, dan Charez (2015), diharapkan dapat diketahui dinamika penyebaran penyakit tersebut. Berbeda dari penelitian Chowell, Safan, dan Charez (2015) yang mengasumsikan efektivitas isolasi dengan presentase tertentu, pembentukan model pada jurnal ini akan mengasumsikan efektivitas isolasi adalah 100%. Selanjutnya akan dilakukan analisis bifurkasi untuk mengetahui pengaruh parameter laju transmisi terhadap perilaku dinamis dari model yang terbentuk.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika Penyebaran Penyakit Virus Ebola

1. Permasalahan Nyata

Virus Ebola merupakan salah satu virus penyebab penyakit demam berdarah Afrika, penyakit tersebut kemudian lebih dikenal dengan penyakit virus Ebola (Brooks, Butel, & Morse, 2005: 206). Penyakit virus Ebola dapat menular baik secara langsung maupun secara tidak langsung melalui cairan tubuh dari manusia atau hewan yang terinfeksi dan benda yang telah terkontaminasi, kemudian masuk ke tubuh melalui kulit yang terluka atau membran mukosa yang tidak terlindungi seperti mata dan hidung. Kelompok yang paling berisiko tertular adalah keluarga penderita dan petugas medis maupun nonmedis yang menangani kasus infeksi. Virus ini bahkan dapat bertahan pada penderita yang telah dinyatakan sembuh, janin pada wanita hamil, dan jenazah (WHO, 2014).

Penularan penyakit virus Ebola dapat dicegah, salah satunya yaitu dengan pemberian vaksin. Vaksin yang disebut rVSV-ZEBOV (*Recombinant Vesicular Stomatitis Virus-Zaire Ebola Virus*) telah melumpuhkan virus Ebola dengan menerapkan metode vaksinasi cincin, yaitu dengan memberikan vaksin pada individu yang mungkin melakukan kontak dengan individu terinfeksi seperti pihak keluarga. Walaupun vaksin untuk penyakit virus Ebola telah ditemukan, namun hingga saat ini belum ada obat khusus yang terbukti dapat menyembuhkan penyakit tersebut sehingga pengobatan yang dapat dilakukan hanya dengan rehidrasi.

Penyakit virus Ebola memiliki masa inkubasi selama 2 – 21 hari dan gejala akan muncul 8 – 10 hari setelah individu terjangkit. Selama masa inkubasi individu yang telah terjangkit belum dapat menularkan dan belum menunjukkan gejala. Gejala yang terjadi menyerupai penyakit menular lain, oleh karena itu diperlukan uji khusus untuk mendiagnosa penyakit tersebut.

Salah satu cara untuk mendiagnosa penyakit virus Ebola yaitu dengan uji RT-PCR (*Reverse Transcriptase Polymerase Chain Reaction*). Jika uji RT-PCR menyatakan positif artinya individu terinfeksi virus Ebola dan sebaliknya. Penelitian mengenai keefektifan uji RT-PCR dalam mendiagnosa penyakit virus Ebola telah dilakukan oleh Diego Chowell, Muntaser Safan, dan Carlos Castillo-Chaves pada tahun 2015. Namun demikian kebutuhan mendesak RT-PCR tidak dapat diberikan kepada semua calon penderita karena adanya keterbatasan medis di negara-negara terjangkit.

2. Asumsi-asumsi yang Digunakan

Berdasarkan permasalahan nyata penyakit virus Ebola, dibuat asumsi-asumsi untuk membatasi permasalahan yang akan dibahas yaitu :

- a. Populasi diasumsikan tertutup.
- b. Diasumsikan hanya terdapat penyakit virus Ebola dalam populasi.
- c. Faktor kelahiran dan kematian alami diperhatikan. Jumlah kelahiran dan kematian diasumsikan sama untuk setiap satuan waktu.
- d. Setiap individu yang lahir diasumsikan belum terjangkit virus.
- e. Setiap kematian yang bukan dikarenakan penyakit virus Ebola diasumsikan sebagai kematian alami.
- f. Setiap individu yang belum terjangkit virus Ebola diasumsikan belum mendapat vaksin sehingga individu tersebut rentan terhadap penyakit virus Ebola.
- g. Setiap individu diasumsikan mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lain.
- h. Setiap individu mempunyai resiko yang sama untuk tertular.
- i. Diasumsikan tidak ada penularan dari jenazah individu terinfeksi virus Ebola.
- j. Individu yang telah terjangkit virus diasumsikan tidak dapat menularkan virus dan tidak menunjukkan gejala selama masa inkubasi.

- k. Diasumsikan efektivitas isolasi adalah 100%, artinya individu terisolasi tidak dapat menularkan virus.
- l. Individu yang sembuh dari penyakit virus Ebola diasumsikan memiliki kekebalan permanen terhadap penyakit virus Ebola.
- m. Diagnosa penyakit virus Ebola diasumsikan hanya dilakukan dengan uji RT-PCR.
- n. Diasumsikan ada keterbatasan medis sehingga uji RT-PCR dan isolasi tidak dapat dilakukan pada setiap individu yang menunjukkan gejala.

3. Formulasi Model

Berdasarkan permasalahan nyata penyakit virus Ebola dan asumsi-asumsi yang telah dibuat, akan dibentuk model dari penyebaran virus Ebola pada suatu populasi. Populasi tersebut dibagi menjadi lima kelompok, yaitu kelompok *susceptible* (S), kelompok *exposed* (E), kelompok *infected* (I), kelompok *isolated* (J), dan kelompok *recovered* (R). Kelompok *susceptible* (S) merupakan kelompok individu yang belum terjangkit dan berisiko tertular virus. Kelompok *exposed* (E) merupakan kelompok individu laten, artinya individu tersebut terjangkit virus namun belum mengembangkan gejala dan belum dapat menularkan. Kelompok *infected* (I) merupakan kelompok individu terinfeksi dan dapat menularkan virus. Kelompok *isolated* (J) merupakan kelompok individu terisolasi. Kelompok *recovered* (R) merupakan kelompok individu sembuh. Berdasarkan pembagian populasi tersebut, model matematika yang terbentuk dituliskan sebagai model $SEIJR$.

Untuk formulasi setiap kelompok pada populasi, didefinisikan parameter-parameter yang digunakan yaitu :

Λ = laju kelahiran

β = laju transmisi

μ = laju kematian alami

κ = laju perpindahan dari E ke I atau ke J

ρ = proporsi dari E yang berpindah ke J

γ = laju perpindahan dari I ke R atau laju kematian karena virus Ebola

δ = laju perpindahan dari J ke R atau laju

kematian karena virus Ebola

α = laju perpindahan dari I ke J

q_1 = proporsi dari I yang mati karena virus Ebola

q_2 = proporsi dari J yang mati karena virus Ebola

Setiap individu yang lahir merupakan individu rentan, individu tersebut kemudian masuk ke S dengan laju Λ . Individu pada S dapat terjangkit virus jika melakukan kontak langsung dengan individu terinfeksi dengan laju transmisi β , kemudian akan berpindah ke E dengan laju λ , yaitu

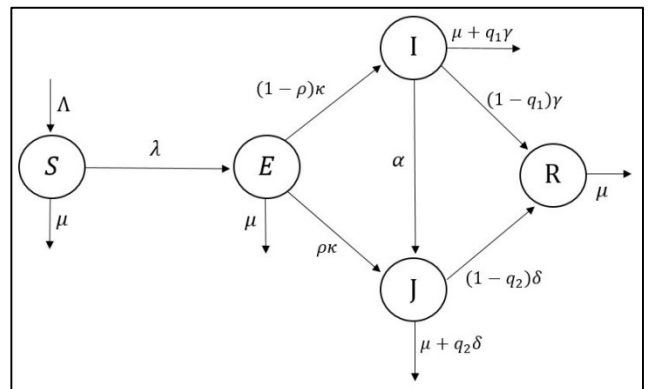
$$\lambda = \beta \frac{I}{N} \tag{1}$$

Dari riwayat kontak individu terinfeksi, individu pada E dapat dideteksi untuk selanjutnya dilakukan uji RT-PCR. Namun dengan adanya keterbatasan riwayat kontak dan infrastruktur medis, baik uji RT-PCR, maupun isolasi tidak dapat diberikan kepada setiap individu pada E . Individu pada E dapat berpindah ke J atau ke I dengan laju κ . Individu pada E dengan uji RT-PCR positif akan berpindah ke J dengan proporsi ρ . Individu pada E dengan uji RT-PCR positif namun tidak mendapat isolasi dan individu pada E yang tidak mendapat uji RT-PCR akan berpindah ke I .

Individu pada I yang mendapat kesempatan diisolasi kemudian akan berpindah ke J dengan laju α . Individu pada I dapat berpindah ke R atau dihapuskan dari I dengan laju γ . Individu pada I yang mati karena virus Ebola akan dihapuskan dari I dengan proporsi q_1 , sedangkan individu pada I yang sembuh akan berpindah ke R .

Individu pada J dapat berpindah ke R atau dihapuskan dari J dengan laju δ . Individu pada J yang mati karena virus Ebola kemudian dihapuskan dari kelompok I dengan proporsi q_2 , sedangkan individu pada J yang sembuh akan berpindah ke R . Individu yang mati bukan karena virus Ebola diasumsikan sebagai kematian alami, dan akan dihapuskan dari setiap kelompok dengan laju μ .

Dari penjelasan tersebut, diperoleh diagram alir model matematis penyebaran penyakit virus Ebola sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram Alir Model Matematika Penyebaran Penyakit Virus Ebola

Berdasarkan Gambar 1 penyebaran penyakit virus Ebola dapat dimodelkan ke dalam sistem persamaan

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \left(\beta \frac{I}{N} + \mu\right) S \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta \frac{I}{N} S - (\kappa + \mu) E \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (1 - \rho)\kappa E - (\alpha + \gamma + \mu) I \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= \rho\kappa E + \alpha I - (\delta + \mu) J \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (1 - q_1)\gamma I + (1 - q_2)\delta J - \mu R \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $S(t) \geq 0$, $E(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $J(t) \geq 0$, dan $R(t) \geq 0$. Jumlah populasi $N(t)$ dinyatakan sebagai

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + J(t) + R(t) \tag{3}$$

Turunan dari (3) yaitu

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - q_1\gamma I - q_2\delta J - \mu N \tag{4}$$

Dari (4) disimpulkan bahwa jumlah populasi $N(t)$ tidak konstan.

B. Ilustrasi Model

Pada bagian ini akan diberikan nilai-nilai parameter yang digunakan (Chowell, Safan, & Chavez, 2015: 8), yaitu

Tabel 1. Nilai Parameter dari Model Matematika Penyebaran Penyakit Virus Ebola

No.	Parameter	Nilai (per hari)
1.	Λ	17182 populasi
3.	μ	$4,98 \times 10^{-5}$
4.	κ	1/3
5.	ρ	0,25
6.	γ	1/6
7.	δ	1/7
8.	α	0,2
9.	q_1	0,7
10.	q_2	0,63

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai dari Tabel 1 ke (2), didapat

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= 17182 - \left(\frac{\beta I}{N} + (4,98 \times 10^{-5})\right)S \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - (0,3334)E \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (0,25)E - (0,3667)I \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= (0,0833)E + (0,2)I - (0,1429)J \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (0,05)I + (0,05)J - (4,98 \times 10^{-5})R \end{aligned} \quad (5),$$

dengan $0 \leq \beta \leq 1$.

C. Titik Ekuilibrium Model

Model matematika dari penyebaran penyakit virus Ebola yang dinyatakan oleh (5) memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, yaitu pada saat

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{dJ(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} = 0 \quad (6).$$

Dari (5) dan (6), didapat

$$\begin{aligned} 17182 - \left(\frac{\beta I}{N} + (4,98 \times 10^{-5})\right)S &= 0 \\ \frac{\beta IS}{N} - (0,3334)E &= 0 \\ (0,25)E - (0,3667)I &= 0 \\ (0,0833)E + (0,2)I - (0,1429)J &= 0 \\ (0,05)I + (0,05)J - (4,98 \times 10^{-5})R &= 0 \end{aligned} \quad (7).$$

1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada bagian ini akan dibahas mengenai titik ekuilibrium bebas penyakit. Didefinisikan variabel untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \text{titik ekuilibrium bebas penyakit } S, \\ \bar{E} &= \text{titik ekuilibrium bebas penyakit } E, \end{aligned}$$

\bar{I} = titik ekuilibrium bebas penyakit I ,
 \bar{J} = titik ekuilibrium bebas penyakit J , dan
 \bar{R} = titik ekuilibrium bebas penyakit R .
 dengan $\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{J} + \bar{R} = \bar{N}$.

Titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{J}, \bar{R})$ diperoleh saat $\bar{I} = 0$. Berdasarkan (7), jika $\bar{I} = 0$ maka didapat

$$E_0 = (345020080, 0, 0, 0, 0) \quad (8).$$

Berdasarkan (8), saat kelompok individu terinfeksi bernilai 0, maka kelompok individu rentan bernilai 345020080, kemudian kelompok individu laten, kelompok individu terisolasi, dan kelompok individu sembuh bernilai 0.

2. Titik Ekuilibrium Endemik

Pada bagian ini akan dibahas mengenai titik ekuilibrium endemik (E_1). Didefinisikan variabel untuk titik ekuilibrium endemik yaitu :

\hat{S} = titik ekuilibrium endemik S ,
 \hat{E} = titik ekuilibrium endemik E ,
 \hat{I} = titik ekuilibrium endemik I ,
 \hat{J} = titik ekuilibrium endemik J , dan
 \hat{R} = titik ekuilibrium endemik R .
 dengan $\hat{S} + \hat{E} + \hat{I} + \hat{J} + \hat{R} = \hat{N}$.

Titik ekuilibrium endemik $E_1(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{R})$ diperoleh saat $\hat{I} \neq 0$. Berdasarkan (7), jika $\hat{I} \neq 0$ maka didapat

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{(58453977,88)\beta - 28585651,7}{(\beta - 0,49)(\beta - 0,32)} \\ \hat{E} &= \frac{(51538,3)\beta - 25203,689}{\beta - 0,32} \\ \hat{I} &= \frac{(35134,978)\beta - 17182}{\beta - 0,32} \\ \hat{J} &= \frac{(79225,36)\beta - 38743,446}{\beta - 0,32} \\ \hat{R} &= \frac{(119364961,3)\beta - 58372848,74}{\beta - 0,32} \end{aligned} \quad (9),$$

untuk $\beta \neq 0,49$ atau $\beta \neq 0,32$.

Berdasarkan (9), artinya saat kelompok individu terinfeksi tidak sama dengan 0 yaitu $\frac{(35134,978)\beta - 17182}{\beta - 0,32}$, maka kelompok individu rentan akan bernilai $\frac{(58453977,88)\beta - 28585651,7}{(\beta - 0,49)(\beta - 0,32)}$ kemudian kelompok individu laten akan bernilai $\frac{(51538,3)\beta - 25203,689}{\beta - 0,32}$, kelompok individu terisolasi akan bernilai $\frac{(79225,36)\beta - 38743,446}{\beta - 0,32}$, dan kelompok individu sembuh akan bernilai $\frac{(119364961,3)\beta - 58372848,74}{\beta - 0,32}$.

D. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari (5) ditentukan dengan *Next Generation Matrix* (K) dari E , I , dan J . ψ akan dituliskan sebagai matriks dari banyaknya individu yang masuk dan menambah banyaknya E , I , dan J . Sedangkan ϕ akan dituliskan sebagai matriks dari banyaknya individu yang keluar dan mengurangi banyaknya E , I , dan J .

$$\psi = \begin{bmatrix} \frac{\beta IS}{N} \\ (0,25)E \\ (0,0833)E + (0,2)I \end{bmatrix} \tag{10},$$

$$\phi = \begin{bmatrix} (0,3334)E \\ (0,3667)I \\ (0,1429)J \end{bmatrix} \tag{11},$$

Berdasarkan (10) dan (11) didapat

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{0,3334} & \frac{a_2}{0,3667} & -\frac{a_1}{0,1429} \\ 0,7499 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,54545 & 0 \end{bmatrix} \tag{12},$$

dengan

$$a_1 = \frac{\beta IS}{(S+E+I+J+R)^2} \tag{13}.$$

$$a_2 = \frac{\beta S(S+E+J+R)}{(S+E+I+J+R)^2}$$

Substitusi (8) ke (12), didapat

$$K(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{0,3667} & 0 \\ 0,7499 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5454 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}.$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) didapat dari nilai eigen terbesar dari (14). Jika η menyatakan nilai eigen dan I merupakan matriks identitas, maka nilai eigen dari (14) didapat dengan menyelesaikan $\det(\eta I - K(E_0)) = 0$, didapat nilai eigen dari (14) yaitu $\eta_1 = 0$ dan $\eta_{2,3} = \pm(1,43)\sqrt{\beta}$, karena $0 \leq \beta \leq 1$, nilai eigen terbesar dari (14) adalah $\eta = (1,43)\sqrt{\beta}$. Sehingga bilangan reproduksi dasar (R_0) dari (5) adalah

$$R_0 = (1,43)\sqrt{\beta} \tag{15}.$$

Pada (15), jika $R_0 = 1$, maka didapat $\beta = 0,49$. Saat $\beta < 0,49$ didapat $R_0 < 1$, artinya jika laju transmisi bernilai kurang dari 0,49 maka rata-rata individu terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu terinfeksi baru dan penyakit tidak dapat berkembang. Saat $\beta > 0,49$ didapat $R_0 > 1$, artinya jika laju transmisi bernilai lebih

dari 0,49, maka rata-rata individu terinfeksi menghasilkan lebih dari satu individu terinfeksi baru, dan penyakit akan menjadi mewabah dalam populasi. Selanjutnya nilai $\beta \leq 0,49$ dan $\beta \geq 0,49$ akan digunakan untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium, karena nilai tersebut muncul pada E_1 dan R_0 .

E. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan titik ekuilibrium dari (5) dapat ditentukan dari nilai eigen hasil linearisasi sistem tersebut. Linierisasi dari (5) menghasilkan

$$Df(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -(b_1 + b_2) & b_3 & -b_4 & b_3 & b_3 \\ b_1 & -(b_3 + b_5) & b_4 & -b_3 & -b_3 \\ 0 & b_6 & -b_7 & 0 & 0 \\ 0 & b_8 & b_9 & -b_{10} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & -b_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\beta I(E+I+J+R)}{(S+E+I+J+R)^2}, & b_7 &= 0.37, \\ b_2 &= 4.98 \times 10^{-5}, & b_8 &= 0.08, \\ b_3 &= \frac{\beta IS}{(S+E+I+J+R)^2}, & b_9 &= 0.2 \tag{17}, \\ b_4 &= \frac{\beta S(S+E+J+R)}{(S+E+I+J+R)^2}, & b_{10} &= 0.14, \\ b_5 &= 0.33, & b_{11} &= 0.05, \\ b_6 &= 0.25, & b_{12} &= 0.05. \end{aligned}$$

1. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Linierisasi (5) di (8) dilakukan untuk melihat kestabilan lokal (5) di (8). Substitusi (8) ke (16), didapat

$$Df(E_0) = \begin{bmatrix} -b_2 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -b_5 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & -b_7 & 0 & 0 \\ 0 & b_8 & b_9 & -b_{10} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & -b_2 \end{bmatrix} \tag{18}.$$

Kestabilan (8) diuji dari nilai eigen (18). Dengan menghitung determinan (18), didapat $(\eta + (4,98 \times 10^{-5}))^2 (\eta + 0,14)(\eta^2 + (0,7)\eta + 0,12 - (0,25)\beta) = 0$ (19).

Dari (19) didapat nilai eigen (18) yaitu

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -(4,98 \times 10^{-5}) \\ \eta_2 &= \frac{-0,7000996 + \sqrt{0,00111 + \beta}}{2} \\ \eta_3 &= \frac{-0,7000996 - \sqrt{0,00111 + \beta}}{2} \tag{20}. \\ \eta_4 &= -0,1429069 \\ \eta_5 &= -(4,98 \times 10^{-5}) \end{aligned}$$

Berdasarkan (20) jika $\beta < 0,49$ didapat $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5 < 0$, maka (8) stabil asimtotik. Artinya jika $\beta < 0,49$, maka solusi dari (5) akan menuju (8), sehingga ketika individu rentan, individu laten, individu terinfeksi, individu terisolasi, dan individu sembuh pada jumlah tertentu, kemudian interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi akan menghasilkan individu laten kurang dari 0,49 dari banyaknya interaksi tersebut, penyakit tidak akan menyebar dan menyebabkan populasi terbebas dari penyakit seiring berjalannya waktu. Titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{J}, \bar{R})$ merupakan titik ekuilibrium hiperbolik saat $\beta < 0,49$, sehingga ada jaminan bahwa solusi dari sistem nonlinear (5) juga merupakan solusi dari linearisasinya.

Jika $\beta > 0,49$, didapat $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5 > 0$, maka (8) tidak stabil. Artinya jika $\beta > 0,49$, maka solusi dari (5) akan menjauh dari (8), sehingga ketika setiap kelompok pada jumlah tertentu, kemudian interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi akan menghasilkan individu laten lebih dari 0,49 dari banyaknya interaksi tersebut, penyakit akan menyebar dan menyebabkan populasi berada dalam keadaan endemik seiring berjalannya waktu.

2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Linierisasi (5) di (9) dilakukan untuk melihat kestabilan lokal (5) di (9). Substitusi (9) ke (16), didapat

$$Df(E_1) = \begin{bmatrix} -(c_1 + b_2) & c_2 & -c_3 & c_2 & c_2 \\ c_1 & -(c_2 + b_5) & c_3 & -c_2 & -c_2 \\ 0 & b_6 & -b_7 & 0 & 0 \\ 0 & b_8 & b_9 & -b_{10} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & -b_2 \end{bmatrix} \quad (21),$$

dengan

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\beta \hat{I}(\hat{E} + \hat{I} + \hat{J} + \hat{R})}{(\hat{S} + \hat{E} + \hat{I} + \hat{J} + \hat{R})^2} \\ c_2 &= \frac{\beta \hat{I} \hat{S}}{(\hat{S} + \hat{E} + \hat{I} + \hat{J} + \hat{R})^2} \\ c_3 &= \frac{\beta \hat{S}(\hat{S} + \hat{E} + \hat{J} + \hat{R})}{(\hat{S} + \hat{E} + \hat{I} + \hat{J} + \hat{R})^2} \end{aligned} \quad (22).$$

Kestabilan (9) diuji dari nilai eigen (21), akan tetapi nilai eigen tersebut tidak akan dicari secara eksplisit, dengan menghitung determinan (21) dan dari polinomial yang terbentuk kemudian akan digunakan kriteria Routh-

Hurwitz untuk menentukan daerah dari nilai eigen (21).

Berdasarkan kriteria Roth-Hurwitz, jika $\beta > 0,49$ maka (9) stabil asimtotik. Artinya jika $\beta > 0,49$, maka solusi dari (5) akan menuju (9). Sehingga ketika setiap kelompok pada jumlah tertentu, kemudian interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi akan menghasilkan individu laten lebih dari 0,49 dari banyaknya interaksi tersebut, penyakit akan menyebar dan menyebabkan populasi berada dalam keadaan endemik seiring berjalannya waktu. Titik ekuilibrium endemik E_1 merupakan titik ekuilibrium hiperbolik saat $\beta > 0,49$, sehingga ada jaminan bahwa solusi dari sistem nonlinear (5) juga merupakan solusi dari linearisasinya. Jika $\beta < 0,49$, dengan $\beta \neq 0,32$, maka (9) bernilai negatif, karena itu untuk $\beta < 0,49$, titik ekuilibrium endemik diabaikan.

F. Grafik Proporsi Jumlah Individu

Pada bagian ini grafik proporsi jumlah individu dari solusi (5) digambarkan dengan Maple 2016 dengan mengambil dua nilai β yaitu $\beta_1 = 0,4$ dan $\beta_2 = 0,6$.

1. Grafik Proporsi Jumlah Individu untuk $\beta = \beta_1 = 0,4$

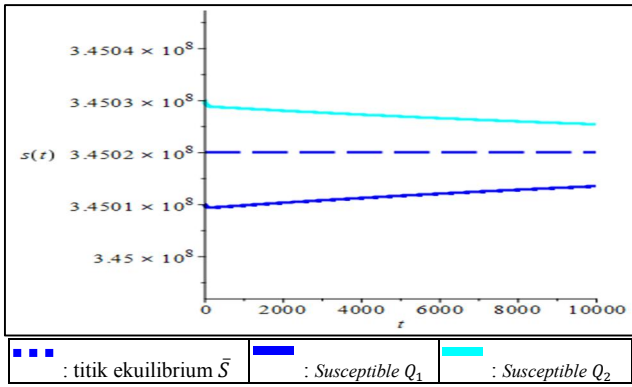
Untuk $\beta = \beta_1 = 0,4$, sistem (5) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= 17182 - \left(\frac{(0,4)I}{S+E+I+J+R} + (4,98 \times 10^{-5}) \right) S \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{(0,4)IS}{S+E+I+J+R} - (0,33)E \\ \frac{dI(t)}{dt} &= (0,25)E - (0,37)I \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= (0,08)E + (0,2)I - (0,14)J \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (0,05)I + (0,05)J - (4,98 \times 10^{-5})R \end{aligned} \quad (23).$$

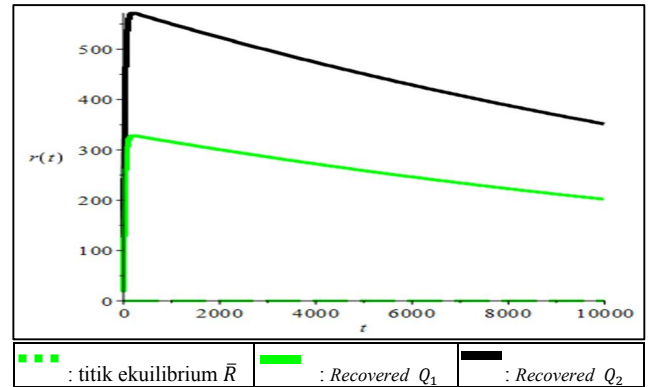
Jika diberikan dua nilai awal untuk masing-masing proporsi S, E, I, J , dan R , yaitu

$$\begin{aligned} Q_1 &= (345010080,80,60,40,20) \\ Q_2 &= (345030080,100,120,130,50) \end{aligned} \quad (24),$$

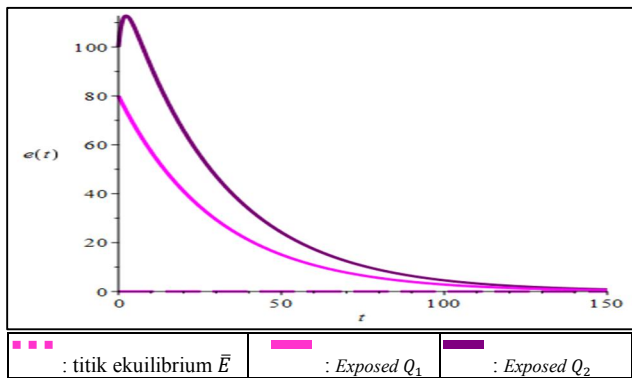
maka hanya ada satu titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu (8). Simulasi disajikan pada Gambar 2-6.



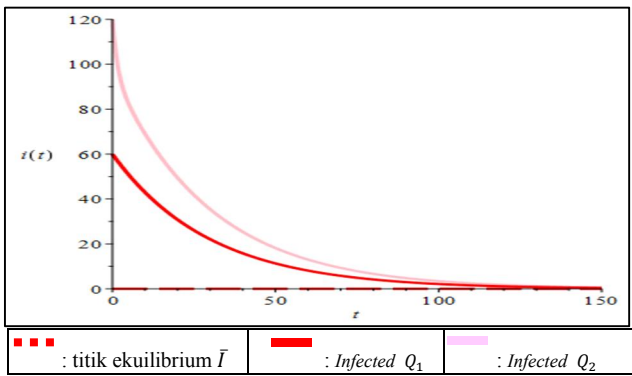
Gambar 2. Grafik Proporsi Kelompok *Susceptible*



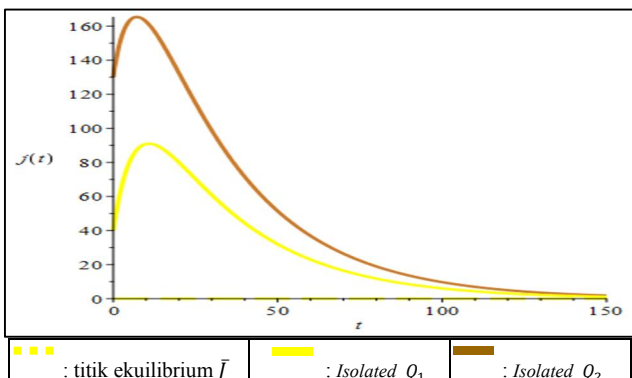
Gambar 6. Grafik Proporsi Kelompok *Recovered*



Gambar 3. Grafik Proporsi Kelompok *Exposed*



Gambar 4. Grafik Proporsi Kelompok *Infected*



Gambar 5. Grafik Proporsi Kelompok *Isolated*

Hasil simulasi pada Gambar 2-6 menunjukkan bahwa untuk $\beta = \beta_1 = 0,4$ dengan (24) sebagai nilai awal, solusi dari (23) menuju (8) seiring berjalannya t , pada E , I , dan J solusi akan segera menuju (8) dalam waktu yang lebih singkat daripada S dan R . Artinya jumlah proporsi individu rentan akan menuju 345020080 seiring berjalannya waktu, kemudian jumlah proporsi individu laten, individu terinfeksi, individu terisolasi, dan individu sembuh menuju 0 seiring berjalannya waktu. Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 2 – Gambar 6 disimpulkan bahwa jika laju transmisi $\beta = \beta_1 = 0,4$, maka penyakit virus Ebola akan menurun dan berangsur menghilang dari populasi.

2. Grafik Proporsi Jumlah Individu untuk $\beta = \beta_2 = 0,6$

Untuk $\beta = \beta_2 = 0,6$, sistem (5) menjadi

$$\frac{ds(t)}{dt} = 17182 - \left(\frac{(0,6)I}{S+E+I+J+R} + (4,98 \times 10^{-5}) \right) s$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{(0,6)IS}{S+E+I+J+R} - (0,33)E$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (0,25)E - (0,37)I$$

$$\frac{dJ(t)}{dt} = (0,08)E + (0,2)I - (0,14)J$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = (0,05)I + (0,05)J - (4,98 \times 10^{-5})R$$

Berdasarkan (9), jika $\beta = \beta_2 = 0,6$, didapat titik ekuilibrium yaitu

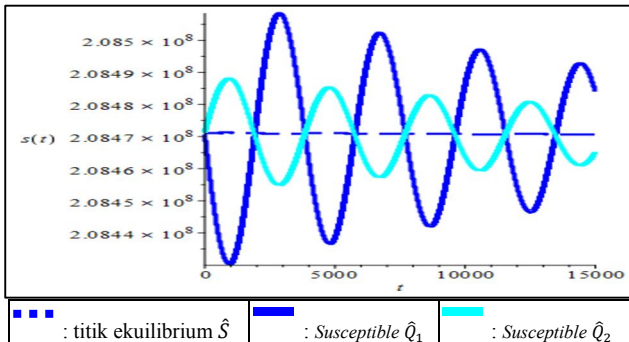
$$E_1(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{R}) = (208471141, 20397, 13905, 31355, 47241189) \quad (26).$$

Jika diberikan dua nilai awal untuk masing-masing proporsi S , E , I , J , dan R , yaitu

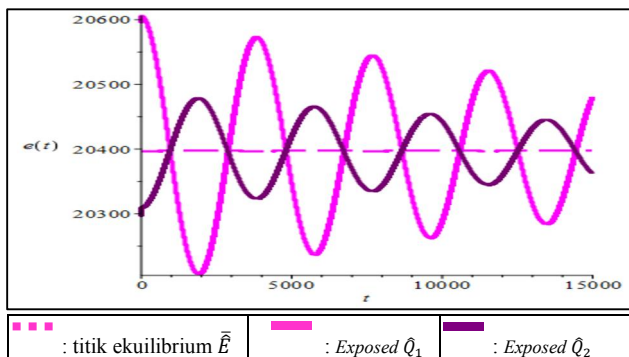
$$\hat{Q}_1 = (208470661, 20597, 14055, 31455, 47241219) \quad (27),$$

$$\hat{Q}_2 = (208471591, 20297, 13855, 31255, 47240989)$$

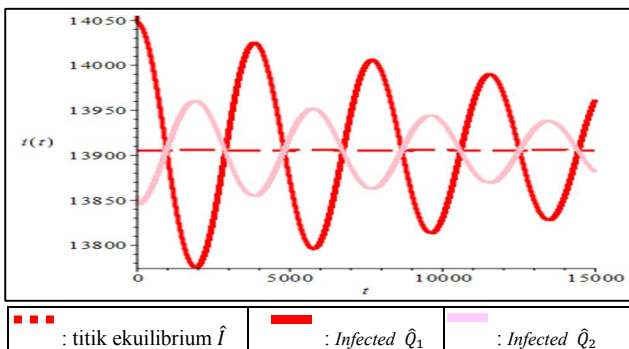
maka didapat simulasi dari (25) pada Gambar 7 – Gambar 11.



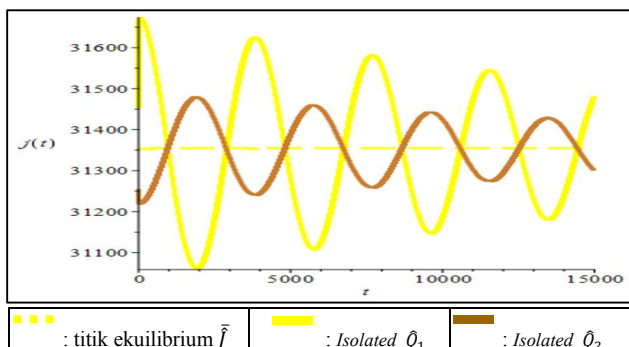
Gambar 7. Grafik Proporsi Kelompok *Susceptible*



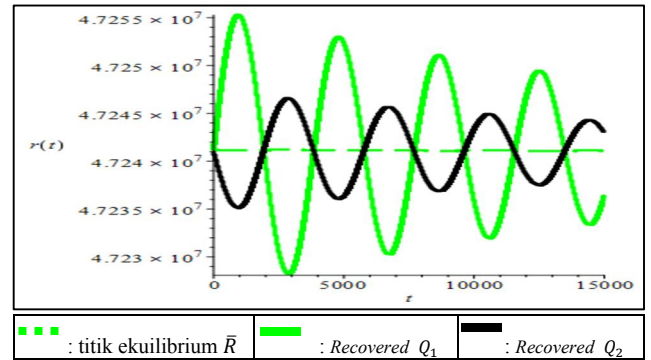
Gambar 8. Grafik Proporsi Kelompok *Exposed*



Gambar 9. Grafik Proporsi Kelompok *Infected*



Gambar 10. Grafik Proporsi Kelompok *Isolated*



Gambar 11. Grafik Proporsi Kelompok *Recovered*

Hasil simulasi pada Gambar 7-11 menunjukkan bahwa untuk $\beta = \beta_2 = 0,6$ dengan (27) sebagai nilai awal, solusi dari (25) stabil menuju titik ekuilibrium endemik pada (26) seiring berjalannya t . Artinya, seiring berjalannya waktu jumlah proporsi S akan menuju 208471141, E akan menuju 20397, I akan menuju 13905, J akan menuju 31355, dan R akan menuju 47241189. Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 7 – Gambar 11 disimpulkan bahwa jika laju transmisi $\beta = \beta_2 = 0,6$, maka penyakit virus Ebola akan menyebar dan terus berada dalam populasi.

G. Transformasi Sistem

Analisa pada titik ekuilibrium bebas penyakit dari (5) menunjukkan bahwa salah satu nilai eigen bernilai nol saat $\beta = 0,49$. Artinya sistem tersebut rentan terhadap gangguan sehingga dimungkinkan terjadinya bifurkasi. Untuk melihat kemungkinan bifurkasi pada (5), perlu dilakukan transformasi sistem guna mendapatkan bentuk yang lebih sederhana.

1. Translasi Parameter

Misalkan $s = S - \bar{S}$, $e = E - \bar{E}$, $i = I - \bar{I}$, $j = J - \bar{J}$, $r = R - \bar{R}$ dan $\bar{\beta} = \beta - 0,49$. Berdasarkan (8) dan dengan mensubstitusikan s, e, i, j, r dan $\bar{\beta}$ ke (5), diperoleh sistem baru yaitu

$$\dot{s} = 17182 - \left(\frac{(\bar{\beta} + 0,49)i}{n} + (4,98 \times 10^{-5}) \right) (s + 345020080)$$

$$\dot{e} = \frac{(\bar{\beta}+0,49)(s+345020080)i}{n} - (0,33)e$$

$$i = (0,25)e - (0,37)i \tag{28},$$

$$j = (0,08)e + (0,2)i - (0,14)j$$

$$\dot{r} = (0,05)i + (0,05)j - (4,98 \times 10^{-5})r$$

dengan $n = (s + 345020080) + e + i + j + r$.

Dari translasi parameter di atas, diperoleh titik ekuilibrium dari (28) yaitu

$$E_3(s, e, i, j, r) = (0,0,0,0,0) \tag{29}.$$

Linierisasi (28) pada (29) menghasilkan

$$Df(E_3) = \begin{bmatrix} -c_1 & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & c_7 & -c_8 & 0 \\ 0 & 0 & c_9 & c_{10} & -c_1 \end{bmatrix} \tag{30},$$

dengan

$$\begin{aligned} c_1 &= 4,98 \times 10^{-5} & c_6 &= 0,08 \\ c_2 &= 0,49 & c_7 &= 0,2 \\ c_3 &= 0,33 & c_8 &= 0,14 \\ c_4 &= 0,25 & c_9 &= 0,05 \\ c_5 &= 0,37 & c_{10} &= 0,05 \end{aligned} \tag{31}.$$

Selanjutnya (28) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \\ \dot{j} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & c_7 & -c_8 & 0 \\ 0 & 0 & c_9 & c_{10} & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ e \\ i \\ j \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(s, e, i, j, r, \bar{\beta}) \\ f_2(s, e, i, j, r, \bar{\beta}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32},$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1(s, e, i, j, r, \bar{\beta}) &= (2,9 \times 10^{-9})(e + i + j + r)\bar{\beta}i + \\ & (1,42 \times 10^{-9})(e + i + j + r)i - \bar{\beta}i \tag{33}. \\ f_2(s, e, i, j, r, \bar{\beta}) &= \bar{\beta}i - (2,9 \times 10^{-9})(e + i + j + \\ & r)\bar{\beta}i - (1,42 \times 10^{-9})(e + i + j + r)i \end{aligned}$$

2. Nilai eigen dan Vektor Eigen

Pada bagian ini akan ditentukan nilai eigen dan masing-masing vektor eigen yang bersesuaian dari (30). Dengan menghitung determinan (30), didapat

$$(\eta + (4,98 \times 10^{-5}))^2(\eta + 0,14)(\eta^2 + (0,7)\eta) = 0 \tag{34}.$$

Berdasarkan (34) didapat nilai eigen dari (30) adalah

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0 \\ \eta_2 &= -(4,98 \times 10^{-5}) \\ \eta_3 &= -0,7 \end{aligned} \tag{35},$$

$$\begin{aligned} \eta_4 &= -0,14 \\ \eta_5 &= -(4,98 \times 10^{-5}) \end{aligned}$$

dan dipilih masing-masing vektor yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} v_1 &= [5844.86, -0.87, -0.6, -1.34, -2022.1]^T \\ v_2 &= [1,0,0,0,0]^T \\ v_3 &= [-0.42,0.8, -0.6,0.1,0.04]^T \\ v_4 &= [0,0,0,1, -0.37]^T \\ v_5 &= [0,0,0,0,1]^T \end{aligned} \tag{36}.$$

3. Pendefinisian Variabel Baru

Persamaan (36) kemudian dapat dibentuk menjadi matriks

$$P = \begin{bmatrix} 5844.86 & 1 & -0,42 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & -0,6 & 0 & 0 \\ -1,34 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ -2022,1 & 0 & 0,04 & -0,37 & 1 \end{bmatrix} \tag{37}.$$

Matriks P dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{bmatrix} s \\ e \\ i \\ j \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5844.86 & 1 & -0,42 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & -0,6 & 0 & 0 \\ -1,34 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ -2022,1 & 0 & 0,04 & -0,37 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{38},$$

kemudian dengan mendiferensialkan (38) didapat

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \\ \dot{j} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5844.86 & 1 & -0,42 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & -0,6 & 0 & 0 \\ -1,34 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ -2022,1 & 0 & 0,04 & -0,37 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{39}.$$

Berdasarkan (32) dan (39) didapat

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{bmatrix} \tag{40},$$

dengan

$$\begin{aligned} g_1(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) &= (0,36)(x + v)\bar{\beta} + \\ & (1,02 \times 10^{-6})v^2 + (1,03 \times 10^{-6})vx + \\ & (2,09 \times 10^{-6})\bar{\beta}v^2 + (2,11 \times 10^{-6})\bar{\beta}vx - \\ & (1,03 \times 10^{-6})\bar{\beta}vz - (1,04 \times 10^{-6})\bar{\beta}xz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) &= -(2103,3)\bar{\beta}x - \\ & (2086,71)\bar{\beta}v + (2,95 \times 10^{-6})vz + \\ & (1,86 \times 10^{-6})vy + (9,88 \times 10^{-7})x^2 + \\ & (2,98 \times 10^{-6})xz + (1,87 \times 10^{-6})xy + \end{aligned}$$

$$(6,04 \times 10^{-6})\bar{\beta}vz + (3,81 \times 10^{-6})\bar{\beta}vy + (2,02 \times 10^{-6})\bar{\beta}x^2 + (6,09 \times 10^{-6})\bar{\beta}xz + (3,84 \times 10^{-6})\bar{\beta}xy - (0,01)(v + x + \bar{\beta}v + \bar{\beta}x)v$$

$$g_3(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) = -(0,36)\bar{\beta}x - (0,35)\bar{\beta}v - (1,01 \times 10^{-6})v^2 - (1,02 \times 10^{-6})vx - (2,07 \times 10^{-6})\bar{\beta}v^2 - (2,09 \times 10^{-6})\bar{\beta}vx + (1,03 \times 10^{-9})(v + x)\bar{\beta}z \quad (41).$$

$$g_4(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) = (0,52)(v + x)\bar{\beta} + (1,47 \times 10^{-6})v^2 + (1,48 \times 10^{-6})vx + (3,01 \times 10^{-6})\bar{\beta}v^2 + (3,03 \times 10^{-6})\bar{\beta}vx - (1,49 \times 10^{-9})(vz + xy)\bar{\beta}$$

$$g_5(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) = (728,02)\bar{\beta}x + (722,28)\bar{\beta}v + (0,002)(v + x)v - (1,02 \times 10^{-9})vz - (6,45 \times 10^{-7})vy - (3,42 \times 10^{-7})x^2 - (1,03 \times 10^{-9})xz - (6,5 \times 10^{-7})xy + (0,004)(v + x)\bar{\beta}v - (2,09 \times 10^{-6})\bar{\beta}vz - (1,32 \times 10^{-6})\bar{\beta}vy - (6,99 \times 10^{-7})\bar{\beta}x^2 - (2,11 \times 10^{-6})\bar{\beta}xz - (1,32 \times 10^{-6})\bar{\beta}xy$$

4. Persamaan Center Manifolds

Persamaan *Center Manifold* untuk (40) didefinisikan sebagai

$$W^c(0) = \{(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) \in \mathbb{R}^6 | w = h_1(v, \bar{\beta}), x = h_2(v, \bar{\beta}), y = h_3(v, \bar{\beta}), z = h_4(v, \bar{\beta}), h_i(0,0) = 0, Dh_i(0,0) = 0, i = 1,2,3,4\} \quad (42).$$

Diasumsikan

$$\begin{aligned} h_1(v, \bar{\beta}) &= k_1v^2 + k_2\bar{\beta}v + k_3\bar{\beta}^2 + k_4v^3 + \dots \\ h_2(v, \bar{\beta}) &= l_1v^2 + l_2\bar{\beta}v + l_3\bar{\beta}^2 + l_4v^3 + \dots \\ h_3(v, \bar{\beta}) &= m_1v^2 + m_2\bar{\beta}v + m_3\bar{\beta}^2 + m_4v^3 + \dots \\ h_4(v, \bar{\beta}) &= n_1v^2 + n_2\bar{\beta}v + n_3\bar{\beta}^2 + n_4v^3 + \dots \end{aligned} \quad (43),$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(h(\tilde{x}, \varepsilon)) &= D_{\tilde{x}}h(\tilde{x}, \varepsilon)(A\tilde{x} + \phi(\tilde{x}, h(\tilde{x}, \varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad - Bh(\tilde{x}, \varepsilon) - \psi(\tilde{x}, h(\tilde{x}, \varepsilon), \varepsilon) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (44),$$

dalam hal ini

$$\begin{aligned} \tilde{x} &\equiv v \\ \tilde{y} &\equiv (w, x, y, z) \\ \varepsilon &= \bar{\beta} \\ h &= h_1, h_2, h_3, h_4 \\ A &= 0 \end{aligned} \quad (45).$$

$$B = \begin{bmatrix} -(4,98 \times 10^{-5}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(4,98 \times 10^{-5}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \varepsilon) &= g_1(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) \\ \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \varepsilon) &= \begin{bmatrix} g_2(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) \\ g_3(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) \\ g_4(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) \\ g_5(v, w, x, y, z, \bar{\beta}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Hasil Transformasi

Substitusikan (45) dan turunan dari (43) ke (44) untuk mendapatkan nilai-nilai koefisien dari (43), kemudian dengan mensubstitusikan nilai-nilai koefisien itu kembali ke (43), hasil transformasi didapat dengan mensubstitusikan (43) ke (40), dengan memisalkan $v = e$ didapat $\dot{e} = (0,357092)\bar{\beta}e + (1,02 \times 10^{-6})e^2 - (0,182138)\bar{\beta}^2e - (0,00734)\bar{\beta}e^2 - (0,02 \times 10^{-6})e^3 + (0,0929011)\bar{\beta}^3e - (0,00378)\bar{\beta}^2e^2 + (15,08 \times 10^{-5})\bar{\beta}e^3 \quad (46),$ dengan $\dot{\bar{\beta}} = 0.$

6. Potret Fase Hasil Transformasi

Dari (46) diambil $\dot{e} = (0,357092)\bar{\beta}e + (1,02 \times 10^{-6})e^2 \quad (47).$

Misalkan

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{(1,02 \times 10^{-6})} \tau \\ \tau &= (1,02 \times 10^{-6})t \end{aligned} \quad (48),$$

dengan demikian (46) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{de}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = (1,02 \times 10^{-6})e' \\ e' &= \left(\frac{0,357092}{1,02 \times 10^{-6}} \right) \bar{\beta}e + e^2 \end{aligned} \quad (49).$$

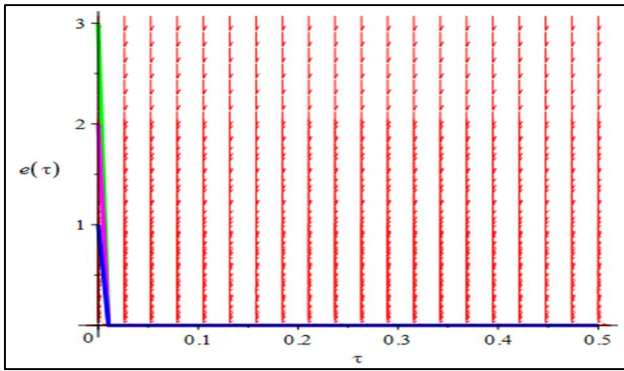
Misalkan

$$\gamma = \left(\frac{0,357092}{1,02 \times 10^{-6}} \right) \bar{\beta} \quad (50),$$

sehingga (49) dapat dituliskan menjadi

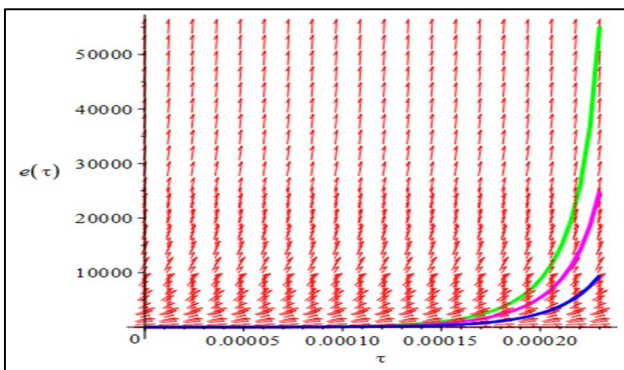
$$e' = \gamma e + e^2 \quad (51).$$

Saat $\gamma = 0$, hanya ada satu titik ekuilibrium yaitu $e = 0$. Saat $\gamma > 0$ dan $\gamma < 0$, terdapat dua titik ekuilibrium, yaitu $e = 0$ dan $e = -\gamma$. Dengan menggunakan Maple 2016, digambarkan potret fase dari (51) sebagai berikut.



Gambar 12. Potret Fase Transformasi Sistem $\gamma = -31019,4$

Untuk $\gamma = -31019,4$ terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $e = 0$ dan $e = 31019,4$, nilai $\gamma = -31019,4$ didapat ketika $\beta = 0,4$. Gambar 12 menunjukkan bahwa ketika diambil nilai awal disekitar titik ekuilibrium, solusi akan mendekati $e = 0$ seiring berjalannya τ sehingga titik ekuilibrium $e = 0$ stabil asimtotik. Artinya jika terdapat 345020180 individu rentan, 10 individu terinfeksi, dan total populasi sebanyak 345020230 individu, maka interaksi antara individu terinfeksi dengan individu rentan akan menghasilkan 4 individu laten, jumlah individu laten akan berkurang dan menuju nol seiring berjalannya waktu, sehingga individu terinfeksi juga berkurang dan penyakit tidak akan menyebar kemudian menghilang dari populasi.

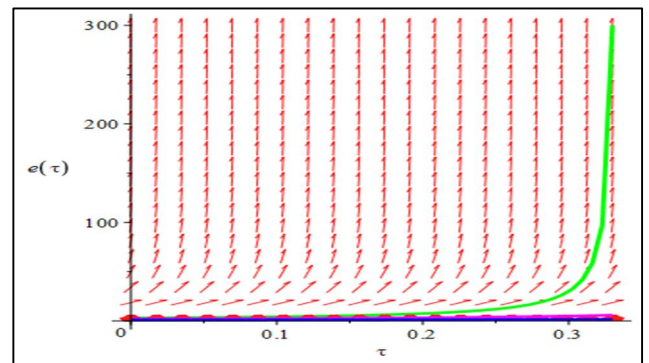


Gambar13. Potret Fase Transformasi Sistem $\gamma = 38\ 6649\ 2$

Untuk $\gamma = 38664,92$ terdapat dua titik ekuilibrium yaitu $e = 0$ dan $e = -38664,92$, nilai $\gamma = 38664,92$ didapat ketika $\beta = 0,6$. Gambar 13 menunjukkan bahwa ketika diambil nilai awal disekitar titik ekuilibrium, solusi akan

menjauhi $e = 0$ seiring berjalannya τ sehingga titik ekuilibrium $e = 0$ tidak stabil. Artinya jika terdapat 345020180 individu rentan, 10 individu terinfeksi, dan total populasi sebanyak 345020230 individu, maka interaksi antara individu terinfeksi dengan individu rentan akan menghasilkan 7 individu laten, jumlah individu laten akan bertambah dan menjauhi nol seiring berjalannya waktu, sehingga individu terinfeksi juga bertambah dan penyakit akan menyebar kemudian mewabah dalam populasi.

Saat $\gamma > 0$, terdapat titik ekuilibrium bernilai negatif. Dalam perhitungan numerik nilai negatif mungkin saja muncul, namun berdasarkan pembahasan skripsi ini dan dilihat dari asumsi awal, nilai negatif tidak bermakna apapun karena populasi tidak akan bernilai negatif.

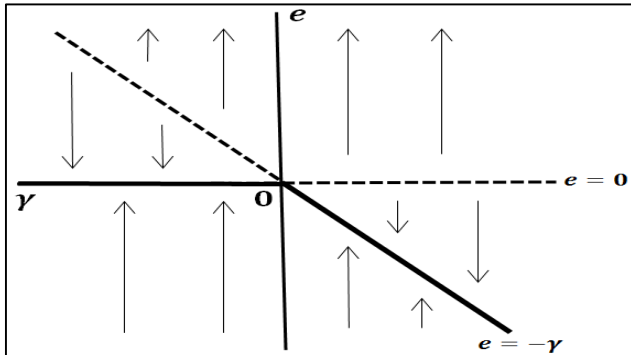


Gambar 14. Potret Fase Transformasi Sistem $\gamma = 0$

Untuk $\gamma = 0$ hanya terdapat satu titik ekuilibrium yaitu $e = 0$, nilai $\gamma = 0$ didapat ketika $\beta = 0,49$. Gambar 14 menunjukkan bahwa ketika diambil nilai awal disekitar titik ekuilibrium, solusi akan menjauhi $e = 0$ seiring berjalannya τ sehingga titik ekuilibrium $e = 0$ tidak stabil. Artinya jika terdapat 345020180 individu rentan, 10 individu terinfeksi, dan total populasi sebanyak 345020230 individu, maka interaksi antara individu terinfeksi dengan individu rentan akan menghasilkan 5 individu laten, jumlah individu laten akan bertambah dan menjauhi nol seiring berjalannya waktu, sehingga individu terinfeksi juga bertambah dan penyakit

akan menyebar kemudian mewabah dalam populasi.

Berdasarkan Gambar 12-14 diagram bifurkasi dari (51) ditunjukkan pada Gambar 14.



Gambar 14. Diagram Bifurkasi (51)

Diagram bifurkasi pada Gambar 14 menunjukkan bahwa ada pertukaran kestabilan saat γ melewati nol, yaitu saat $\gamma > 0$, titik ekuilibrium $e = -\gamma$ stabil dan titik ekuilibrium $e = 0$ tidak stabil. Sebaliknya, saat $\gamma < 0$, titik ekuilibrium $e = 0$ stabil dan titik ekuilibrium $e = -\gamma$ tidak stabil.

Berdasarkan (50) nilai γ bergantung pada β karena $\bar{\beta} = \beta - 0,49$, sehingga perubahan kestabilan pada sistem (51) terjadi karena variasi nilai β . Variasi nilai β yang merupakan parameter laju transmisi menyebabkan munculnya bifurkasi, kemudian berdasarkan karakter perubahan kestabilannya jenis bifurkasi yang terjadi adalah bifurkasi transkritikal.

SIMPULAN DAN SARAN

H. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III sesuai dengan nilai-nilai parameter yang digunakan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Model matematika untuk penyebaran penyakit virus Ebola berbentuk model *SEIJR* yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - \left(\beta \frac{I}{N} + \mu\right) S \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta \frac{I}{N} S - (\kappa + \mu) E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= (1 - \rho)\kappa E - (\alpha + \gamma + \mu) I \\ \frac{dJ(t)}{dt} &= \rho\kappa E + \alpha I - (\delta + \mu) J \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (1 - q_1)\gamma I + (1 - q_2)\delta J - \mu R \end{aligned}$$

dengan $\lambda = \beta \frac{I}{N}$.

2. Berdasarkan simulasi model, sistem persamaan dari model matematika penyebaran penyakit virus Ebola memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) dan titik ekuilibrium endemik (E_1), yaitu

- a. $E_0(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{J}, \bar{R}) = (345020080, 0, 0, 0, 0)$

- b. $E_1(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{R})$, dengan

$$\hat{S} = \frac{(58453977,88)\beta - 28585651,7}{(\beta - 0,49)(\beta - 0,32)}$$

$$\hat{E} = \frac{(51538,3)\beta - 25203,69}{\beta - 0,32}$$

$$\hat{I} = \frac{(35134,98)\beta - 17182}{\beta - 0,32}$$

$$\hat{J} = \frac{(79225,36)\beta - 38743,45}{\beta - 0,32}$$

$$\hat{R} = \frac{(119364961,3)\beta - 58372848,74}{\beta - 0,32}$$

dan didapat bilangan reproduksi dasar dari sistem persamaan model matematika penyebaran penyakit virus Ebola yaitu $R_0 = (1,43)\sqrt{\beta}$. Saat $\beta < 0,49$ didapat $R_0 < 1$ dan didapat E_0 bersifat stabil asimtotik, artinya jika laju transmisi penyakit virus Ebola kurang dari 0,49 penyakit tidak akan menyebar dan seiring berjalannya waktu populasi akan berada dalam keadaan bebas dari penyakit virus Ebola. Saat $\beta > 0,49$ didapat $R_0 > 1$ dan didapat E_1 bersifat stabil asimtotik, artinya jika laju transmisi penyakit virus Ebola lebih dari 0,49 penyakit akan menyebar dalam populasi dan seiring berjalannya waktu penyakit virus Ebola akan tetap berada dalam populasi.

3. Bifurkasi yang terjadi dengan memvariasikan parameter laju transmisi β adalah bifurkasi transkritikal.

I. Saran

Pada penulisan tugas akhir skripsi ini, penulis membentuk model *SEIJR* dengan transmisi virus hanya berasal dari kelompok terinfeksi, kemudian melakukan bifurkasi pada satu parameter. Penulisan selanjutnya dapat

dikembangkan dengan menambahkan transmisi virus dari kelompok lain, melakukan bifurkasi pada lebih dari satu parameter, atau dengan mempertimbangkan parameter vaksinasi pada model.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. (2000). *Aljabar linear elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Astrom, K. J., & Murray, R. M. (2009). *Feedback systems*. Princeton: Princeton University Press.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis (4th ed)*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- Brooks, G. F., Butel, J. S., & Morse, S. A. (2005). *Mikrobiologi kedokteran*. (Terjemahan dr. Nani Widorini). Jakarta: Salemba Medika.
- Chowell, D., Safan, M., & Chavez, C. C. (2015). Modeling the case of early detection of ebola virus disease. *Mathematical and Statistical Modeling for Emerging and Re-emerging Infectious Diseases*, 1, 57-70.
- Direktorat Jenderal Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan. (2015). *Pedoman kesiapsiagaan menghadapi penyakit virus ebola*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan.
- Driessche, P. v., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180, 29-48.
- Giordano, F. R., Fox, W. P., & Horton, S. B. (2014). *A first course in mathematical modeling (5th ed)*. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Heffernan, J., Smith, R., & Wahl, L. (2005). Perspectives on the basic reproduction ratio. *The Royal Society Interface*, 2, 281-293.
- Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan matematika aplikasi dan terapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kuznetsov, Y. A. (1998). *Elements of applied bifurcation theory (2nd ed)*. New York: Springer.
- Meinsma, G. (1996). Elementary proof of the routh-hurwitz test. *Systems & Control Letters*, 25, 237-242.
- Olsder, G., & Woude, J. v. (2004). *Mathematical systems theory intermediate (3rd ed)*. Delft: VSSD.
- Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems (3rd ed)*. New York: Springer.
- Seydel, R. (2010). *Practical bifurcation and stability analysis (3rd ed)*. New York: Springer.
- Widowati, & Sutimin. (2007). *Buku ajar pemodelan matematika*. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (2nd ed)*. New York: Springer.
- World Health Organization. (2014). *Ebola virus disease*. Diakses dari <http://www.who.int/mediacentre/factsheet/s/fs103/en/> pada tanggal 21 Maret 2017, jam 08.05.