KAJIAN BOLA-LUAR DAN BOLA-DALAM PADA BIDANG-EMPAT

THE STUDY OF CIRCUMSPHERE AND INSPHERE OF A TETRAHEDRON

Oleh: Prasetia Pradana[1)], Himmawati Puji Lestari[2)]
Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
[1)]prasetiapradana@gmail.com [2)]himmawati@uny.ac.id

Abstrak

Sebuah segitiga memiliki sebuah lingkaran-luar dan lingkaran-dalam. Sebuah segitiga pada bidang jika dianalogikan dalam ruang maka adalah bidang-empat, sedangkan bola di dalam ruang merupakan analogi dari lingkaran pada bidang. Dengan mengkaji analogi antara segitiga dan lingkaran pada bidang dengan bidang-empat dan bola pada ruang diselidiki eksistensi bola-luar dan bola-dalam pada bidang-empat seperti halnya lingkaran-luar dan lingkaran dalam. Hasil dari kajian ini diperoleh bahwa setiap bidang-empat memiliki bola-luar. Sifat-sifat bola-luar pada bidang-empat meliputi: 1) garis-garis sumbu suatu bidang-empat berpotongan di sebuah titik yang merupakan pusat bola-luar bidang-empat tersebut; 2) pusat bola-luar suatu bidang-empat siku-siku tidak terletak pada bidang miringnya; 3) terdapat bidang-empat yang pusat bola-luarnya terletak pada salah satu bidang sisinya. Setiap bidang-empat juga memiliki bola-dalam. Sifat-sifat bola-dalam pada bidang-empat meliputi: 1) bidang-bidang bagi sudut dua bidang sisi suatu bidang-empat bertemu di sebuah titik yang merupakan pusat bola-dalam bidang-empat tersebut; 2) pusat bola-luar suatu bidang-empat teratur juga merupakan pusat bola-dalam bidang-empat tersebut.

Kata Kunci: lingkaran-luar, lingkaran-dalam, segitiga, bola-luar, bola-dalam, bidang-empat.

Abstract

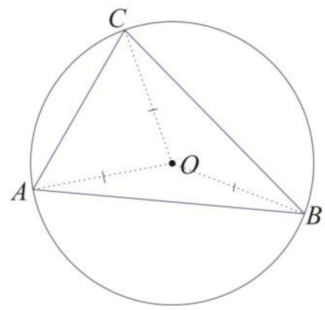
A triangle has a circumcircle and an incircle. The analogy of a triangle on plane is a tetrahedron in space, while the analogy of a circle on plane is a sphere in space. By reviewing the analogy of the triangle and the circle on plane to the tetrahedron and the sphere in space, the existence of circumsphere and insphere of tetrahedrons were investigated as of which circumcircle and incircle were. The result of the study proved that each tetrahedron has a circumsphere. The characteristics of the circumsphere of tetrahedron are: 1) the perpendicular bisector lines of the tetrahedron intersect at a single point of which the center of the circumsphere of the tetrahedron; 2) the center of the circumsphere of a trirectangular tetrahedron is not located on its face; 3) there is a tetrahedron which center of its circumsphere is located on one of its face. Each tetrahedron also has an insphere. The characteristics of an insphere of a tetrahedron are: 1) angle bisector planes of a tetrahedron intersect at a point which is the center of the insphere ot the tetrahedron; 2) the center of a circumsphere of a regular tetrahedron is also the center of a insphere of the same regular tetrahedron.

Keywords: circumcircle, incircle, triangle, circumsphere, insphere, tetrahedron.

PENDAHULUAN

Geometri dimensi dua dipelajari tentang titik dan garis. Pengkajian titik dan garis di antaranya didapatkan berbagai bentuk bangun datar. Dimensi tiga tidak hanya mempelajari titik dan garis tetapi juga mempelajari bidang. Pada dimensi tiga akan ditemui berbagai bangun ruang beberapa diantaranya adalah bangun yang dibentuk dari berbagai bangun datar.

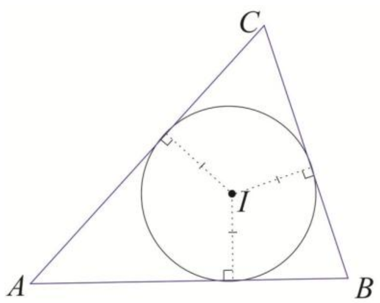
Pada dimensi dua juga dipelajari hubungan antara bangun datar. Salah satunya hubungan antara segitiga dan lingkaran. Sebuah segitiga memiliki lingkaran-luar serta lingkaran-dalam. Lingkaran-luar pada segitiga didasarkan dari sebuah teorema "*garis sumbu dari setiap* *sisi segitiga* ΔABC *bertemu di titik O yang berjarak sama dari setiap titik sudutnya*" (Smith, 2000: 159).



Gambar 1 Lingkaran-luar dari segitiga *ABC*.

Karena terdapat sebuah titik yang berjarak sama dari titik-titik segitiga maka pastilah ada sebuah lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut. Gambar 1 menunjukkan lingkaran dengan titik pusat *O* merupakan lingkaran-luar (*circumcircle*) dari ΔABC.

Sebuah segitiga tidak hanya memiliki lingkaran-luar namun juga memiliki sebuah lingkaran-dalam. Eksistensi lingkaran-dalam pada segitiga didasari oleh sebuah teorema yang menyatakan bahwa, "*Garis-garis bagi sudut pada* ΔABC *bertemu pada sebuah titik interior I yang berjarak sama dari sisi-sisinya*". Ilustrasi teorema yang dikemukakan Smith (2000: 159) adalah sebagai berikut.



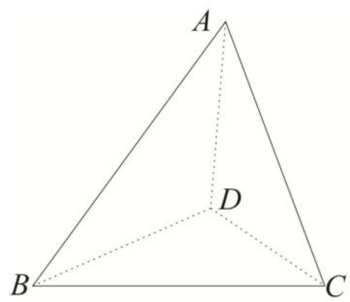
Gambar 2 Lingkaran-dalam dari segitiga *ABC*.

Terdapat sebuah titik yang berjarak sama dari sisi segitiga maka terdapat pula sebuah lingkaran yang menyinggung sisi-sisi segitiga. Lingkaran tersebut selanjutnya disebut sebagai lingkaran-dalam. Gambar 2 menunjukkan lingkaran dengan titik pusat *I* merupakan lingkaran-dalam (*incircle*) dari ΔABC.

Di dalam matematika analogi dapat digunakan pada bangun datar ke bangun ruang. Salah satu contoh analogi pada bidang ke ruang adalah segitiga ke bidang empat. Menurut Murdanu (2003: 10), "*Segitiga adalah gabungan tiga ruas garis yang dibentuk oleh tiga titik yang tidak segaris yang sepasang-sepasang saling dihubungkan*". Tiga buah garis merupakan jumlah minimal terbentuknya daerah tertutup di suatu bidang.

Terbentuknya ruang tertutup yang dibatasi oleh bidang minimal membutuhkan empat buah bidang. Bangun ruang yang dibentuk oleh empat buah bidang adalah bidang-empat. Kemiripan tersebut yang menjadi dasar analogi antara segitiga pada bidang dan bidang-empat pada ruang (Wono Setya Budhi & Bana G. Kartasasmita, 2015: 73).

Analogi juga dapat digunakan pada lingkaran dan bola. Keduanya sama-sama kumpulan titik-titik yang berjarak sama dari sebuah titik. Perbedaan antara keduanya jika lingkaran merupakan kumpulan titik di suatu bidang, sedangkan bola merupakan kumpulan titik pada suatu ruang.



Gambar 3. Bidang-empat *A.BCD*.

Bidang-empat merupakan analogi dari segitiga sedangkan bola merupakan analogi dari lingkaran. Berdasarkan hal tersebut dalam skripsi ini dikaji apakah juga terdapat bola-luar dan bola-dalam pada bidang-empat serta jika ada bagaimanakah sifat-sifat keduanya.

PEMBAHASAN

Pada bagian pembahasan akan ditunjukkan eksistensi bola-luar dan bola-dalam pada bidang-empat. Lebih lanjut juga akan dibahas sifat-sifat dari bola-luar serta bola-dalam pada bidang-empat.

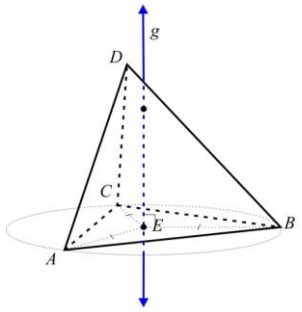
Bola-Luar Bidang-Empat

Menurut Hvidsten (2012: 69), "*Sebuah lingkaran dengan pusat circumcenter dari segitiga dan jari-jari dari pusat ke salah satu titik sudut dan melalui titik sudut yang lain, disebut lingkaran-luar dari segitiga*". Mengadopsi pernyataan tersebut maka bola-luar dapat diartikan sebagai sebuah bola yang berpusat di sebuah titik dan panjang jari-jarinya merupakan jarak dari pusat ke salah satu titik sudut bidang-empat dan melalui titik sudut yang lainnya. Titik pusat suatu bola-luar berjarak sama dari titik-titik sudut bidang-empat.

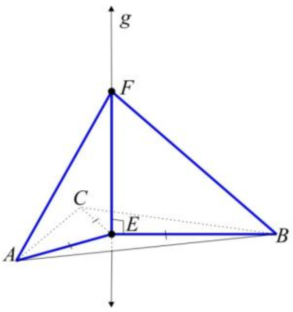
Misalkan terdapat sebuah bidang-empat sebarang *D.ABC* maka harus ditunjukkan bahwasannya ada titik O sedemikian hingga $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$. Untuk menunjukkan eksistensi titik tersebut maka perlu dilakukan langkah sebagai berikut.

1. Titik yang berjarak sama dari *A,B,C*

Misalkan titik E merupakan pusat lingkaran-luar dari ΔABC. Dilukiskan sebuah garis g yang mana garis g adalah sebuah garis yang tegak lurus bidang ABC serta melalui titik E.



Gambar 4 Garis *g* tegak lurus bidang *ABC*.



Gambar 5 Segitiga *AEF* dan segitiga *BEF*.

Dipilih sebarang titik F pada garis g sehingga terdapat ΔAEF, ΔBEF, dan ΔCEF. Jika diamati segitiga AEF dan segitiga BEF merupakan segitiga yang saling kongruen. Kekongruenan antara keduanya diperoleh karena memenuhi kriteria kekongruenan S-Sd-S. Selain kongruen dengan ΔAEF, ΔBEF juga kongruen dengan ΔCEF. Seperti halnya dengan ΔAEF, kriteria kekongruenan S-Sd-S juga terpenuhi antara ΔBEF dan ΔCEF.

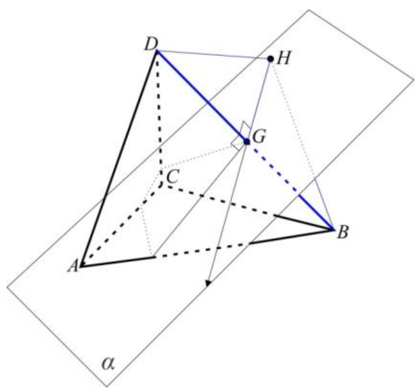
Akibat dari $\Delta AEF \cong \Delta BEF$ dan $\Delta BEF \cong \Delta CEF$ maka $\Delta AEF \cong \Delta BEF \cong \Delta CEF$. Kekongruenan ini mengakibatkan sudut serta sisi yang bersesuaian antara ketiganya juga kongruen. Salah satunya $\overline{AF} \cong \overline{BF} \cong \overline{CF}$ atau dapat dikatakan bahwa jarak dari titik A, B, dan

C ke titik *F* sama. Di awal pengambilan titik *F* pada garis g dilakukan sebarang, sehingga setiap titik pada garis g berjarak sama dengan titik *A*, *B*, dan *C*.

Garis yang melalui pusat lingkaran luar sebuah bidang sisi bidang-empat dan tegak lurus dengan bidang tersebut selanjutnya disebut sebagai garis sumbu dari bidang-empat.

2. Titik yang berjarak sama dari B dan D

Menurut Fogiel (1993: 20), "*Setiap ruas garis memiliki tepat satu titik tengah*". Bidang-empat *D.ABC* diberikan titik *G* di mana titik tersebut merupakan titik tengah dari $\overline{BD}$. Bidang α merupakan bidang yang tegak lurus dengan $\overline{BD}$ dan memuat titik *G*. Dipilih sebarang titik *H* pada bidang α.



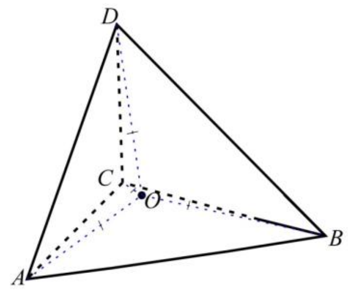
Gambar 6 Segitiga *BGH* dan segitiga *DGH*.

Pada Δ*BGH* dan Δ*DGH* memiliki sisi yang sama yaitu sisi *GH*. Keduanya juga merupakan segitiga siku-siku yang mana Δ*BGH* siku –siku di ∠*BGH* sementara Δ*DGH* siku–siku di ∠*DGH*. Titik *G* merupakan titik tengah $\overline{BD}$, sehingga $\overline{BG}$ dan $\overline{DG}$ sama panjang.

Akibat dari $\overline{GH} \cong \overline{GH}$, $\angle BGH \cong \angle DGH$, dan $\overline{BG} \cong \overline{DG}$ maka Δ*BGH* dan Δ*BGH* memenuhi kriteria kekongruenan S-Sd-S. Setiap sudut dan sisi yang bersesuaian pada keduanya segitiga tersebut juga saling kongruen, tidak terkecuali sisi *BH* dan sisi *DH*. Hal ini berarti jarak titik *H* dengan titik *B* maupun *D* sama. Titik *H* merupakan sebarang titik pada bidang α, dengan demikian setiap titik pada bidang α berjarak sama dengan titik *B* dan *D*.

3. Titik pusat bola-luar

Garis g tegak lurus dengan bidang *ABC*, sedangkan bidang $\alpha \perp \overline{BD}$. Ruas garis $\overline{BD}$ tidak sejajar dengan bidang *ABC*, akibatnya bidang α juga tidak sejajar dengan garis *g*. Sebuah bidang dan garis yang tidak sejajar akan saling berpotongan.

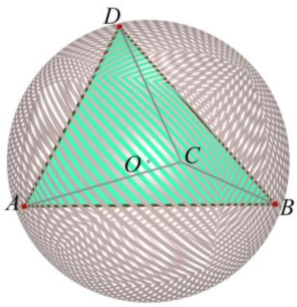


Gambar 7 Titik *O* berjarak sama dengan *A*, *B*, *C*, dan *D*.

Telah ditunjukkan bahwa setiap titik pada garis *g* berjarak sama dengan titik *A*, *B*, dan *C*. Misal titik *O* merupakan titik perpotongan antara *g* dan α, karena *O* merupakan berada pada garis g maka $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$. Telah ditunjukkan pula bahwa titik-titik pada bidang α berjarak sama dengan titik *B* dan *D*. Titik *O* juga berada pada bidang α maka $\overline{OB} \cong \overline{OD}$, dengan demikian maka $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$. Bisa disimpulkan bahwa titik *O* berjarak sama dengan titik *A*, *B*, *C*, maupun *D*.

Dengan langkah 1, 2, dan 3 telah terbukti bahwa terdapat titik yang berjarak sama dari titik-titik sudut bidang-empat *D.ABC*. Terbukti pula bahwa bidang-empat *D.ABC* memiliki bola-luar, yaitu bola yang melalui keempat titik sudut bidang-empat. Di awal dipilih sebarang bidang-empat *D.ABC*, dengan demikian hal ini berlaku untuk setiap bidang-empat.

Teorema 1 *Setiap bidang-empat mempunyai bola-luar.*



Gambar 8 Bola-luar dari bidang-empat *D.ABC*.

Sifat-Sifat Bola-Luar pada Bidang-Empat

Pada segitiga garis-garis sumbunya berpotongan di sebuah titik.Titik tersebut juga merupakan pusat dari lingkaran-luar segitiga tersebut. Garis-garis sumbu suatu bidang-empat juga memiliki sifat yang juga merupakan analogi dari hal tersebut. Hal ini dinyatakan dalam

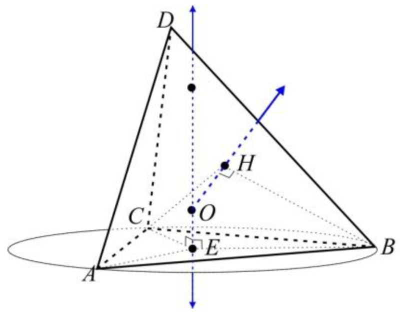
Teorema 2 *Garis-garis sumbu suatu bidang-empat berpotongan di sebuah titik yang merupakan pusat bola-luar bidang-empat tersebut.*

Bukti:

Setiap bidang sisi memiliki sebuah garis sumbu bidang-empat, dengan demikian bidang-empat memiliki empat buah garis sumbu bidang-empat. Akan diteliti apakah keempat garis sumbu pada bidang-empat bertemu di sebuah titik yang juga merupakan titik pusat bola-luar.

Misalkan terdapat bidang-empat *D.ABC* dengan titik *E* merupakan pusat lingkaran-luar dari segitiga *ABC*. Titik *G* yang mana titik tersebut merupakan titik tengah dari $\overline{BD}$. Telah ditunjukkan bahwa garis yang tegak lurus bidang sisi *ABC* dan melalui *E* berpotongan dengan bidang yang tegak lurus $\overline{BD}$ dan melalui *G*. Titik perpotongan keduanya merupakan titik pusat bola-luar yang selanjutnya akan disebut sebagai titik *O*.

Dilukiskan sebuah sinar garis yang berpangkal di titik *O* dan tegak lurus bidang-sisi *BCD.* Sinar garis tersebut memotong bidang-sisi *BCD* di titik *H*. Akan ditunjukkan bahwa titik *H* merupakan pusat lingkaran-luar dari *ΔBCD.*



Gambar 9 Garis $\overleftrightarrow{EO}$ dan sinar garis $\overrightarrow{OH}$.

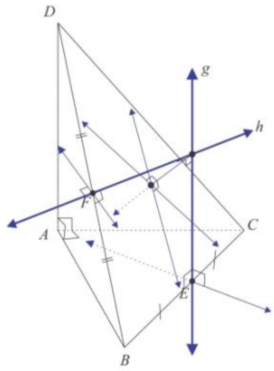
Terdapat Δ*OBH* dan Δ*OCH* yang mana keduanya memiliki sisi yang sama yaitu *OH*. Telah diketahui bahwa ruas garis *OH* tegak lurus dengan bidang sisi *BCD*. Setiap garis pada bidang sisi *BCD* yang melalui *H* tegak lurus terhadap $\overline{OH}$, termasuk $\overleftrightarrow{OB}$ dan $\overleftrightarrow{OC}$. Hal tersebut menunjukkan bahwa Δ*OBH* dan Δ*OCH* merupakan segitiga siku-siku. Ruas garis $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ karena keduanya merupakan jari-jari bola-luar bidang-empat *D.ABC*, sehingga $\Delta OBH \cong \Delta OCH$.

Cara yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa Δ*OCH* dan Δ*ODH* juga merupakan pasangan segitiga yang saling konguen. Hal ini berarti Δ*OBH*, Δ*OCH*, dan Δ*ODH* saling kongruen akibatnya $\overline{HB} \cong \overline{HC} \cong \overline{HD}$. Titik *H* pada bidang sisi *BCD* berjarak sama dengan titik *B*, *C*, dan *D*. Terbukti bahwa *H* merupakan titik pusat lingkaran-luar Δ*BCD*.

Sinar garis yang berpangkal di *O* dan tegak lurus terhadap bidang-sisi *ACD* memotong bidang sisi tersebut di titik *J*. Menggunakan cara yang sama maka terbukti pula bahwa *J* merupakan titik pusat lingkaran-luar Δ*ACD*. Titik *K* yang merupakan titik potong antara sinar garis $\overrightarrow{OK}$ dengan bidang-sisi *ABD* juga merupakan titik pusat lingkaran-luar Δ*ABD*.

Garis-garis yang memuat $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OJ}$, dan $\overrightarrow{OK}$ juga tegak lurus secara berturut-turut terhadap bidang sisi *ABC*, *BCD*, *ACD*, dan *ABD*. Masing-masing garis tersebut juga melalui sebuah titik pusat lingkaran-luar, maka garis $\overleftrightarrow{OE}, \overleftrightarrow{OH}, \overleftrightarrow{OJ}$, dan $\overleftrightarrow{OK}$ meupakan garis sumbu bidang-empat. Keempatnya juga melalui titik *O* yang merupakan pusat bola-luar bidang-empat *D.ABC*. Terbukti bahwa empat buah garis sumbu bidang-empat berpotongan di sebuah titik yang merupakan pusat bola-luar.■

Pada segitiga siku-siku pusat lingkaran-luarnya terletak pada titik tengah hipotenusanya. Bidang-empat yang merupakan analogi dari segitiga siku-siku adalah bidang-empat siku-siku. Menurut A. Sardjana (2008: 5.6), "*Bidang-empat siku-siku adalah bidang empat yang mempunyai tiga rusuk bertemu pada satu titik sudut saling tegak lurus*". Bidang-Empat siku-siku merupakan analogi dari segitiga siku-siku, tetapi ternyata titik pusat bola-luarnya tidak pada bidang sisi miringnya.



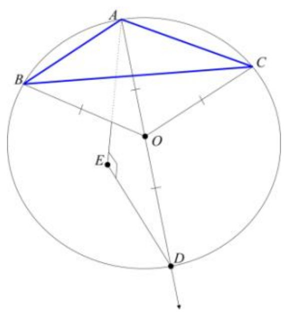
Gambar 10 Titik potong garis *g* dan garis *h* yang merupakan garis sumbu bidang-empat.

Meskipun demikian tidak menutup kemungkinan bahwa terdapat bidang-empat yang pusat bola-luarnya pada bidang sisi miringnya.

Teorema 3 *Jika titik O merupakan pusat lingkaran-luar dari* ΔABC, *titik D pada* $\overrightarrow{AO}$ *sedemikian hingga* $\overline{AO} \cong \overline{OD}$ *dan terdapat titik E yang nonkoplanar dengan A, B, C sedemikian hingga ∠DEA merupakan sudut siku-siku maka O merupakan titik pusat bola-luar bidang-empat A.BCE. Jika* ΔABC *bukan merupakan segitiga tumpul maka pusat bola-luar A.BCE terletak pada salah satu bidang sisi.*

Bukti:

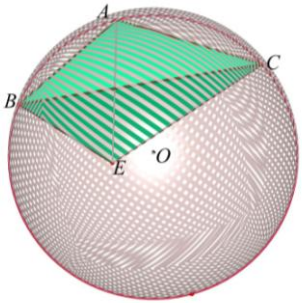
Terdapat segitiga *ABC*. Titik *O* merupakan pusat lingkaran-luar dari ΔABC. Dipilih titik *D* pada $\overrightarrow{AO}$ sedemikian hingga $\overline{AO} \cong \overline{OD}$ dan terdapat titik *E* yang tidak koplanar dengan *A*, *B*, *C* sedemikian hingga ∠*DEA* merupakan sudut siku-siku. Akan dibuktikan bahwa *O* merupakan pusat bola-luar bidang-empat *A.BCE*.



Gambar 11 Pusat bola-luar bidang-empat *A.BCE* jika ΔABC segitiga tumpul.

Titik O merupakan pusat lingkaran luar ΔABC sehingga $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ dan $\overline{OB} \cong \overline{OC}$. Segitiga *DEA* merupakan sebuah segitiga siku-siku. Ruas garis AD merupakan hipotenusa segitiga tersebut sehingga pusat lingkaran-luar ΔDEA terletak pada titik tengah $\overline{AD}$. Titik O merupakan titik tengah $\overline{AD}$ karena seperti yang telah diketahui bahwa $\overline{AO} \cong \overline{OD}$. Titik O merupakan pusat lingkaran luar ΔDEA, oleh karenanya $\overline{AO} \cong \overline{OE}$.

Dari segitiga *ABC* diperoleh $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ dan $\overline{OB} \cong \overline{OC}$, sedangkan dari segitiga *DEA* didapatkan $\overline{AO} \cong \overline{OE}$. Itu artinya titik *O* merupakan titik yang berjarak sama dari *A*, *B*, *C*, maupun *E*. Terbukti bahwa *O* merupakan pusat bola-luar dari bidang-empat *A.BCE*. ■



Gambar 12 Bola-luar bidang-empat *A.BCE*.

Bola-Dalam Bidang empat

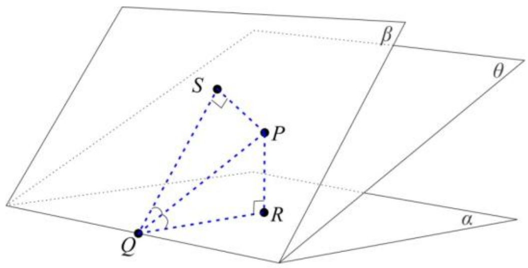
Lingkaran-dalam suatu segitiga adalah sebuah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga tersebut. Titik pusat lingkaran-dalam suatu segitiga adalah sebuah titik yang berjarak sama dari sisi segitiga. Seperti halnya lingkaran-dalam segitiga, sebuah bola-dalam suatu bidang-empat juga menyinggung sisi-sisi bidang-empat tersebut.

Untuk menunjukkan eksistensi sebuah bola-dalam perlu ditunjukkan bahwasannya ada sebuah titik yang berjarak sama dari keempat bidang sisi bidang-empat. Guna mempermudah penulisan maka selanjutnya bidang yang memuat ΔABC , ΔABD, ΔBCD, dan ΔACD berturut-turut disebut sebagai bidang α, β, γ, dan δ.

Berikut langkah untuk menunjukkan eksistensi bola-dalam pada bidang-empat.

1. Titik yang berjarak sama dari dua bidang

Misalkan bidang θ adalah bidang yang membagi sudut antara bidang α dan β menjadi sama besar. Dipilih sebarang titik *P* pada bidang θ, maka akan terdapat titik Q pada $\overleftrightarrow{AB}$ sedemikian hingga $\overline{PQ}$ berpotongan tegak lurus dengan $\overleftrightarrow{AB}$. Ditentukan titik *R* dan *S* sedemikian hingga $\overline{PR} \perp \alpha$ dan $\overline{PS} \perp \beta$.



Gambar 13 Segitiga *PQS* dan segitiga *PRS.*

Segitiga ΔPQS dan $\Delta\, PRS$ memenuhi kriteria kekongruenan Sd-S-Sd. Hal ini dikarenakan $\angle SQP \cong \angle RQP$, $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$ $\angle QPS \cong \angle QPR$, akibatnya $\overline{SP}$ dan $\overline{RP}$ juga kongruen. Bisa juga dikatakan bahwa jarak antara titik *P* ke α sama dengan jarak antara *P* ke β.

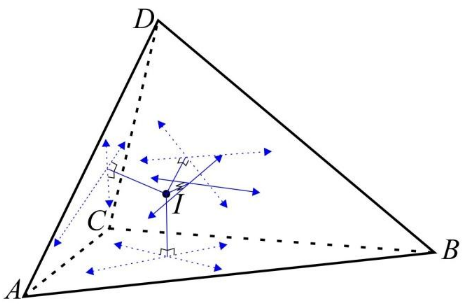
Penentuan titik *P* pada bidang θ diawal dilakukan secara sebarang, sehingga untuk setiap titik pada bidang θ berjarak sama dengan bidang α dan β. Hal tersebut berarti bahwa bidang θ merupakan bidang yang berjarak sama dengan bidang α dan β. Bidang yang memiliki sifat seperti bidang θ selanjutnya disebut sebagai bidang bagi.

Cara yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bidang yang berjarak sama dari β dan γ. Bidang tersebut adalah bidang ι, bidang bagi sudut-bidang β dan γ. Bidang κ merupakan bidang bagi sudut-bidang α dan δ juga pasti merupakan bidang yang berjarak sama dari keduanya.

2. Titik pusat bola-dalam

Bidang α dan γ merupakan bidang-bidang yang memotong β. Bidang α dan γ merupakan bidang yang memuat sisi bidang-empat *D.ABC* maka keduanya tidak sejajar, maka bidang θ dan bidang ι juga tidak sejajar. Garis yang merupakan perpotongan bidang θ dan ι selanjutnya akan disebut sebagai garis *m*.

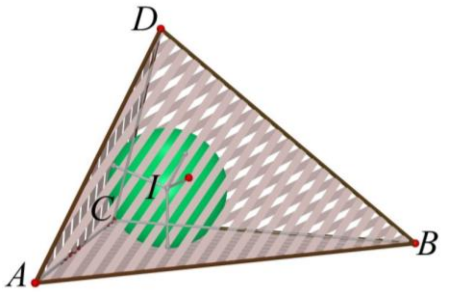
Bidang κ dan garis *m* tidak sejajar. Pepotongan antara keduanya disebut titik *I*. Titik *I* merupakan anggota garis *m*, oleh karenanya jarak bidang α , β dan γ terhadap Titik *I* sama. Titik *I* juga terletak pada bidang κ. Hal tersebut menunjukkan titik *I* juga berjarak sama dari α dan δ.



Gambar 14 Titik *I* yang berjarak sama dari keempat bidang sisi bidang-empat *D.ABC.*

Penjelasan di atas menunjukkan bahwa titik *I* berjarak sama dari α, β, γ, dan δ. Titik *I* berjarak sama dengan keempat bidang yang membentuk bidang-empat *D.ABC*. Terbukti bahwa untuk sebarang bidang-empat terdapat titik yang berjarak sama dari bidang sisinya. Hal tersebut berarti untuk setiap bidang-empat memiliki sebuah bola-dalam, yaitu bola yang menyiggung keempat bidang sisinya, seperti dalam teorema berikut.

Teorema 4 *Setiap bidang-empat memiliki sebuah bola-dalam.*



Gambar 15 Bola-dalam dari bidang-empat *D.ABC.*

Sifat-Sifat Bola-Dalam pada Bidang-Empat

Garis-garis bagi sudut segitiga bertemu di sebuah titik yang merupakan titik pusat lingkaran-luar segitiga tersebut. Sifat yang hampir sama juga berlaku pada bidang-empat.

Teorema 5 *Bidang-bidang bagi sudut dua bidang sisi suatu bidang-empat bertemu di sebuah titik yang merupakan pusat bola-dalam bidang-empat tersebut.*

Bukti:

Terdapat sebarang bidang-empat *D.ABC* dengan titik *I* merupakan pusat bola-dalamnya. Bidang yang memuat Δ*ABC*, Δ*ABD*, Δ*BCD*, dan Δ*ACD* berturut-turut adalah bidang α, β, γ, dan δ. Bidang θ adalah bidang yang bagi sudut antara bidang α dan β. Bidang ι dan κ berturut-turut merupakan bidang bagi sudut-bidang β dan γ serta bidang bagi sudut-bidang α dan δ. Terdapat pula bidang λ yaitu bidang bagi sudut γ dan δ. Akan dibuktikan bahwa θ, ι, κ, dan λ melalui titik *I*.

Telah dibuktikan bahwa bidang θ, ι, dan κ melaui titik *I*. Titik *I* merupakan pusat bola-dalam dari bidang-empat *D.ABC*, sehingga jarak *I* dengan kempat bidang sisi bidang-empat *D.ABC* sama. Tidak terkecuali jarak *I* dengan bidang γ maupun δ. Terdapat bidang λ yang merupakan bidang bagi sudut γ dan δ, maka titik yang berjarak sama dengan γ dan δ terletak pada bidang λ.

Terbukti bahwa bidang bidang λ juga melalui titik *I*. Terbukti pula bahwa bidang-bidang bagi sudut dua bidang sisi suatu bidang-empat bertemu di sebuah titik yang merupakan pusat bola-dalam bidang-empat tersebut. ■

Titik pusat lingkaran-luar pada segitiga sama sisi juga merupakan titik pusat lingkaran-dalamnya. Segitiga sama sisi merupakan sebuah segitiga yang semua sisinya kongruen. Karena bidang-empat merupakan analogi dari segitiga maka bidang-empat teratur merupakan analogi dari segitiga sama sisi. Menurut A. Sardjana (2008: 5.6), "*Bidang-empat teratur adalah bidang-empat yang keempat bidang sisinya kongruen*".

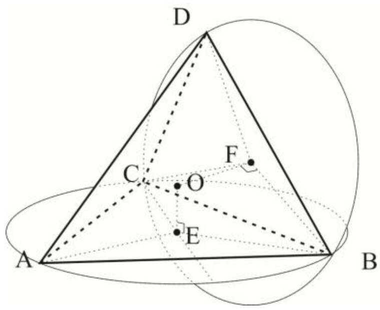
Teorema 6 *Pusat bola-luar suatu bidang-empat teratur juga merupakan pusat bola-dalamnya.*

Bukti:

Misalkan ada sebuah bidang-empat teratur *D.ABC*. Bidang-empat *D.ABC* teratur maka $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC} \cong \overline{AD} \cong \overline{BD} \cong \overline{BD}$. Sebuah bidang yang memuat titik *A,B*, dan *C* disebut bidang α. Bidang β merupakan bidang yang memuat titik *A,B,D*. titik *B,C,D* termuat pada bidang γ serta titik *A,C,D* pada bidang δ.

Terdapat titik *E* yang mana *E* merupakan pusat melalui pusat lingkaran-luar ΔABC. Titik-titik yang berjarak sama dari titik *A, B, C* terletak pada garis *g*. Garis *g* merupakan sebuah garis yang tegak lurus bidang α dan melalui *E*.

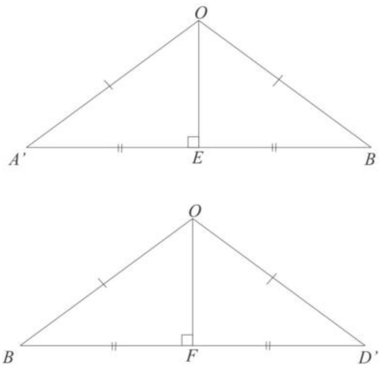
Misal titik *O* merupakan titik pusat bola-luar bidang-empat *D.ABC* maka *O* terletak pada garis *g*. Jarak *O* ke titik-titik *A, B, C*, dan *D* sama sehingga maka $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$.



Gambar 16 Bidang-empat *D.ABC* dengan pusat bola-luar *O*.

Titik *F* merupakan pusat lingkaran-luar dari ΔBCD. Titik *B*, *O*, *D*, dan *F* dapat membentuk dua buah segitiga yang saling kongruen, yaitu ΔBOF dan ΔDOF. Keduanya kongruen kariteria kekongruenan S-S-S terpenuhi. Akibat kekongruenan ini diantaranya $\angle BOF \cong \angle DOF$, $\angle OBF \cong \angle ODF$, dan $\angle BFO \cong \angle DFO$.

Dilukiskan $\Delta A'BO$ dengan *E* pada $\overline{A'B}$ serta $\overline{OE} \perp \overline{A'B}$. Hal lain yang perlu diperhatikan adalah $A'EO \cong \Delta AEO$. Dilukiskan pula $\Delta BD'O$ dengan *F* pada $\overline{BD'}$ serta $\Delta D'FO \cong \Delta DFO$.



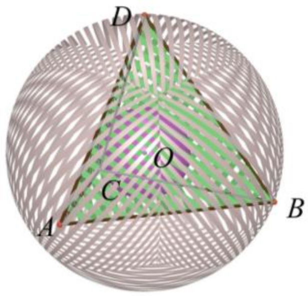
Gambar 17 Segitiga *A'BO* dan segitiga *BD'O.*

Menurut Murdanu (2003: 6), "*misalkan titik-titik A, B, C pada garis g dan titik-titik D, E, F pada garis h. Jika* $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ *dan* $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ *maka* $\overline{AC} \cong \overline{DF}$". Berpegang pada pernyataan tersebut maka pada *ΔA'BO* dan *ΔBD'O* $\overline{A'B} \cong \overline{BD'}$. Hal Ini dikarenakan $\overline{A'E} \cong \overline{B'E} \cong \overline{B'F} \cong \overline{D'F}$. Ruas garis $\overline{A'O}$, $\overline{B'O}$, $\overline{D'O}$ saling kongruen, ketiganya kongruen karena sama panjang dengan jari-jari bola-luar bidang-empat *D.ABC*. Segitiga $BD'O$ kongruen dengan *A'BO* karena memenuhi kriteria kekongruenan S-S-S.

Segitiga *A'BO* dan *BD'O* saling kongruen, artinya sudut-sudut yang bersesuaian juga kongruen. Segitiga *A'B'O* dan *B'D'O* merupakan segitiga sama kaki maka $\angle OA'B \cong \angle OBA' \cong \angle OBD' \cong \angle OD'B$. Sudut OBA' dan sudut OBD' saling kongruen berarti $\angle OBE \cong \angle OBF$ karena E terletak pada $\overline{A'B}$ serta *F* pada $\overline{BD'}$. Kekongruenan antara $\angle OBE$ dan $\angle OBF$ melengkapi sayarat terpenuhi kriteria kekongruenan S-Sd-S pada *ΔOBE* dan *ΔOBF*.

Segitiga ΔOBE dan ΔOBF saling kongruen maka $\angle OBE \cong \angle OBF$. Sudut OBE merupakan sudut siku-siku maka $\angle OBF$ juga merupakan sudut siku-siku. Kekongruenan antara *OBE* dan *OBF* juga menghasilkan $\overline{OE} \cong \overline{OF}$. Jarak antara titik *O* dengan bidang α dan β sama.

Cara yang hampir sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa jarak antara titik *O* dengan bidang α dan γ, begitu pula dengan jarak antara titik *O* dengan bidang α dan δ. Titik *O* berjarak sama dengan keempat bidang yang membangun bidang-empat *D.ABC*. Terbukti bahwa titik pusat bola-luar pada suatu bidang-empat teratur juga merupakan titik pusat bola-dalamnya. ■



Gambar 18 Bola-luar dan bola-dalam pada bidang-empat teratur *D.ABC*.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Dari uraian dan pembahasan diperoleh simpulan sebagai berikut.

1. Setiap bidang-empat memiliki sebuah bola-luar.
2. Sifat-sifat bola-luar bidang-empat
   a. Garis-garis sumbu suatu bidang-empat berpotongan di sebuah titik yang merupakan pusat bola-luar bidang-empat tersebut.
   b. Pusat bola-luar suatu bidang-empat siku-siku tidak terletak pada bidang miringnya.

c. Jika titik O merupakan pusat lingkaran-luar dari ΔABC, titik D pada $\overrightarrow{AO}$ sedemikian hingga $\overline{AO} \cong \overline{OD}$ dan terdapat titik E yang nonkoplanar dengan A, B, C sedemikian hingga $\angle DEA$ merupakan sudut siku-siku maka O merupakan titik pusat bola-luar bidang-empat $A.BCE$. Jika segitiga ABC bukan merupakan segitiga tumpul maka titik pusat bola-luar bidang-empat terletak pada salah satu bidang sisi.

3. Setiap bidang-empat memiliki sebuah bola-dalam.
4. Sifat-sifat bola-dalam bidang-empat
   a. Bidang-bidang bagi sudut dua bidang sisi suatu bidang-empat bertemu di sebuah titik yang merupakan pusat bola-dalam bidang-empat tersebut.
   b. Pusat bola-luar suatu bidang-empat teratur juga merupakan pusat bola-dalam bidang-empat tersebut.

Saran

Saran yang dapat diberikan berdasarkan kajian ini, yaitu mengembangkan pembahasan terkait rumus-rumus serta ukuran. Pembahasan dengan geometri analitik akan sangat membantu pembahasan pembahasan terkait rumus-rumus serta ukuran.

DAFTAR PUSTAKA

Borsuk, R., & W. Szmielew. (1960). *Foundation of Geometry*. Amsterdam: North-Holland.

Wono Setya Budhi & Kartasasmita, Bana G. (2015). *Berpikir Matematis Matematika untuk Semua*, Jakarta: Penerbit Erlangga.

Fogiel, M. (1987). *The Essentials of Geometry*. New Jersey: Research ad Education Association.

Greenberg, Marvin Jay. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries Third Edition*. New York: W. H.

Hvidsten, Michael. (2012). *Exploring Geometry*. Minnesota: Gustavus Adolphus College.

Karso, H., dkk. (2010). *Materi Kulikuler Matematika SMA.* Jakarta: Penerbit Universitas Tebuka.

Moise, Edwin E. (1990). *Elementary Geometry from Advanced Standpoint*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Murdanu. (2003). *Geometri Euclides Secara Deduktif-Aksiomatik.* Yogyakarta.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol I, New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol II, New Jersey: Princeton University Press.

Rich,Barnet & Thomas, Cristhopher. (2009). *Scaum's Outline Geometry Fourth Edition*. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Sardjana, A (2008). *Geometri Ruang*. Jakarta: Penerbit Universitas Terbuka.

Smith. James T. (2000). *Methods of Geometry*. New York: John Wiley & Sons. Freeman and Company.